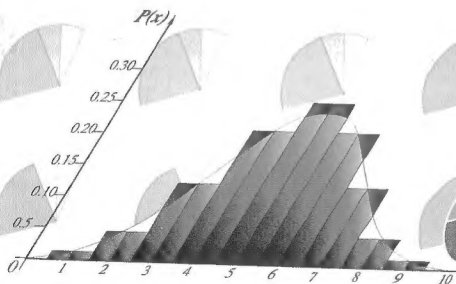


مبادئ الإحصاء

Elementary Statistics

الأستاذ
عزام صبري

بروفسور
عوض منصور





﴿ وَقُلْ أَعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ ﴾

صدق الله العظيم

مبادئ الإحصاء

مبادئ الإحصاء

تأليف

الأستاذ عزام صبري

البروفيسور عوض منصور

الطبعة الأولى

٢٠٠٠م - ١٤٢٠هـ

دار صفاء للنشر والتوزيع - عمان

رقم الايداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (١٩٩٩/٨/١٣٦٦)

رقم التصنيف: ٥١٩

المؤلف ومن هو في حكمه: عوض منصور، عزام صبري

عنوان الكتاب: مبادئ الاحصاء

الموضوع الرئيسي: ١- العلوم الطبيعية

٢- الاحصاء

بيانات النشر: عمان: دار صفاء للنشر والتوزيع

* - تم إعداد بيانات الفهرسة الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية

حقوق الطبع محفوظة للناسخ

Copyright ©
All rights reserved

الطبعة الأولى

2000 م - 1420 هـ



دار صفاء للنشر والتوزيع

عمان - شارع السلط - مجمع الفحيص التجاري - هاتف وفاكس ٤٦١٢١٩٠

ص.ب ٩٢٢٧٦٢ عمان - الاردن

DAR SAFA Publishing - Distributing

Telefax: 4612190 P.O.Box: 922762 Amman - Jordan

ردمك 3 - 40 - 402 - 9957 - ISBN



طبع في مطبع الأرز ١١ ٣٦١٠٠٥٥

بين يدي الكتاب

الحمد لله والصلاة والسلام على خير الأنام ورسول البشرية محمد وعلى آله وصحبه اجمعين وبعد.

من فضل الله ومنته وكرمه ان يمن علينا باصدار سلسلة جديدة في الإحصاء والعلوم الرياضية المبرمجة بلغة مختلفة من لغات الحاسوب بعد سلسلتنا في الحاسبات الالكترونية التي لاقت رواجاً وانتشاراً واسعاً في الجامعات والكليات والمعاهد في انحاء الوطن العربي.

ونأمل ان تتوالى أعداد هذه السلسلة كأختها لتقديم ما يحتاجه طلابنا في الجامعات والكليات من مفاهيم ومبادئ اساسية في الإحصاء والعلوم الرياضية المبرمجة وحرصنا في هذا الكتاب على اغناءه ببرامج الحاسبات لمعظم الطرق الإحصائية وكيفية الوصول إلى نتائج احصائية من خلال استخدام الطالب للحاسوب كما أغنينا الكتاب بمريد من الأمثلة والتمارين حتى تكون عوناً للطلاب لتبسيط المحتوى.

ويكفي ان نذكر ان جميع الشعائر التعبدية في ديننا الحنيف مرتبطة ارتباطاً وثيقاً بالرياضيات والإحصاء بأعداد ركعاتها وفي التسابيح ونظام الزكاة والحج وبعدد مرات الطواف والسعي بين الصفا والمروة... الخ.

وقبل الختام نود ان نشكر جميع الأخوة الذين ساهموا في اخراج هذا الكتاب إلى حيز الوجود هذا وإننا نأمل من الأخوة الزملاء أن لا يخلوا علينا في ابداء رأيهم

أو ملاحظاتهم القيمة حتى نستطيع العمل على تلافيها من خلال الطباعات القادمة وفي
الختام نسأل الله ان يكون هذا الكتاب خالصا لوجه الله الكريم وأن يكون من العلم
الذي ينتفع به.

المؤلفان

1999/8/20

المحتويات

5مقدمة
	الفصل الأول : جمع البيانات وعرضها
12	1-1: مصادر جميع البيانات.....
12	1-1-1: المصادر المباشرة.....
13	1-1-2: المصادر غير المباشرة.....
14	2-1: طرق جمع البيانات.....
15	3-1: العينة وطرق اختيارها.....
20	4-1: تفرغ البيانات الإحصائية.....
20	1-4-1: التوزيعات التكرارية.....
26	2-4-1: التوزيع التكراري المتجمع.....
29	3-4-1: الجداول المقفلة والمفتوحة.....
30	4-4-1: الجداول المنتظمة وغير المنتظمة.....
38	5-1: عرض البيانات.....
38	1-5-1: العرض الجدولي.....
40	2-5-1: العرض الهندسي للبيانات المنفصلة.....
46	6-1: التمثيل البياني للجداول التكرارية.....
57	7-1: أنواع المنحنيات.....
	الفصل الثاني
	مقاييس النزعة المركزية
73	1-2: الوسط الحسابي.....
87	2-2: الوسيط.....
100	3-2: المنوال.....
107	4-2: العلاقة الخطية بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال.....
114	5-2: المئينات والرتب المئينية.....
123	6-2: العشرات والربيعات.....

الفصل الثالث مقاييس التشتت

- 137 1-3: المدى
140 2-3: نصف المدى الربيعي
143 3-3: الانحراف المعياري

الفصل الرابع العزوم والتفرطح

- 161 1-4: العزوم
164 2-4: التفرطح
164 3-4: الالتواء

الفصل الخامس التوزيع الطبيعي

- 171 1-5: شكل المنحنى الطبيعي
172 2-5: التوزيع الطبيعي المعياري

الفصل السادس الاحتمالات

- 189 1-6: الفضاء العيني
195 2-6: التكرار النسبي والاحتمال
202 3-6: الحوادث المستقلة
204 4-6: الاحتمال المشروط
206 5-6: المتغيرات العشوائية
212 6-6: نظرية ذات الحدين

الفصل السابع الارتباط والانحدار

- 219 1-7: جداول الانتشار وعلاقتها بالارتباط
220 2-7: معامل الارتباط وخصائصه
221 1-2-7: معامل ارتباط بيرسون
225 2-2-7: معامل الارتباط بطريقة الانحراف المعياري
225 3-2-7: معامل ارتباط سبيرمان للرتب

2293-7: الانحدار
-----	--------------------

الفصل الثامن

السلاسل الزمنية

2391-8: تمثيل السلسلة الزمنية
2402-8: معامل الخشونة والمعدلات المتحركة
2463-8: مركبات السلسلة الزمنية
2474-8: تقدير مركبة الاتجاه
2534-8: تقدير المركبة الفصلية

الفصل التاسع

الأرقام القياسية

2571-9: مفهوم الأرقام القياسية وأنواعها واستخدامها
2592-9: الرقم القياسي البسيط
2613-9: الرقم القياسي المرجح

الفصل العاشر

الاحصاءات الحيوية

2711-10: تعريف الاحصاءات السكانية وأهميتها
2742-10: التقديرات السكانية
2753-10: إحصائيات الوفيات
2774-10: إحصائيات الخصوبة

280المراجع
-----	--------------

الفصل الأول

جمع البيانات وعرضها

1-1 مقدمة :

الطريقة الإحصائية تعتبر من أهم الطرق التي يقوم عليه مفهوم علم الإحصاء وقبل التعرف على مفهوم هذه الطريقة لابد من التعرف على بعض التعريفات التي تفيد في هذا المجال.

تعريف: علم الإحصاء علم يبحث في جمع البيانات وتنظيمها وتلخيصها وعرضها ثم تحليل البيانات من أجل الوصول إلى نتائج تفيد في اتخاذ القرارات عند ظهور حالات عدم التأكد.

ولاحقاً صنّفه العلماء والمهتمين به إلى صنفين:

تعريف: علم الإحصاء الوصفي هو العلم الذي يساعد في تصنيف وتلخيص وعرض البيانات.

تعريف: علم الإحصاء التحليلي هو العلم الذي يختص في تحليل البيانات المجموعة والمخصصة بهدف الوصول إلى نتائج تفيد في اتخاذ القرارات عند ظهور حالة عدم التأكد.

تعريف: الطريقة الإحصائية هي مجموعة الطرق العلمية لجمع البيانات وتبويبها وعرضها ووصفها وتحليلها بهدف استخدام النتائج المنطقية عن الظاهرة قيد البحث.

وتعتمد الطريقة الإحصائية على عناصر أهمها:

أ) جمع البيانات : قبل أن تقوم بهذه العملية علينا مراعاة مايلي:

- 1) تحديد للمعلومات المراد جمعها عن الظاهرة بدقة ووضوح.
- 2) التعرف على جميع المحاولات السابقة لدراسة الظاهرة أو الظواهر المشابهة لها حتى نتجنب الازدواجية في العمل ونتعرف على الصعوبات التي واجهت الباحثين ونقوم بتذليلها.
- 3) أن تكون التكلفة لجمع البيانات قليلة إلا في الحالات الإستثنائية.
- 4) أن تكون المعلومات صحيحة ودقيقة حتى تكون النتائج التي يتوصل إليها الباحث صحيحة.

2-1) مصادر جمع البيانات

يمكن الحصول على المعلومات من مصدرين:

- 1) المصادر المباشرة.
- 2) المصادر غير المباشرة.

1-2-1: المصادر المباشرة (الميدانية)

وهي الحصول على المعلومات من مصادرها الأصلية وذلك عن طريق الإتصال بمفردات المجتمع قيد البحث مباشرة من خلال توجيه الأسئلة إما عبر المقابلة الشخصية أو التلفون أو المراسلة وستكلم عن كل منها بإيجاز:

* المقابلة الشخصية: وتتم هذه المقابلة بواسطة أشخاص مدربين على القيام بهذه الأعمال ويقوم الباحث المدرب بطرح أسئلة محددة ومعدة مسبقا على الشخص المقصود ويسجل الإجابة عن هذه الأسئلة.

من

ومن مميزات المقابلة الشخصية الحصول على معلومات دقيقة ويستطيع الباحث

الذي يقوم بطرح الأسئلة توضيح أي غموض أو التباس قد تكون موجودة في الأسئلة. وأما عيوبها فهي التكلفة العالية والتحيز الناتج عن تأثير جامع البيانات على الشخص المبحوث سواء كان يقصد أم غير قصد.

**** التلقون:** ويستخدم كوسيلة أيضا مباشرة وهو غير مكلف لكنه غير متوفر لدى الجميع مما يجعل عملية جمع البيانات مقتصرة على من يملكونه وهو هي أهم عيوب هذه الطريقة.

***** المراسلة:** ويتم جمع المعلومات عن طريق إرسال استمارة إحصائية إلى الشخص المبحوث عبر البريد، ومن مميزاتها التكلفة القليلة ولكن يعاب عليها احتمال عدم رد الاستمارة إلى الجهة المصدرة لها.

ويقوم الباحث بجمع البيانات على استمارة إحصائية، والاستمارة الإحصائية عبارة عن صحيفة يوجد بها أسئلة وبجانب كل سؤال يوجد فراغ حتى يستطيع الباحث أو المجيب من وضع الإجابة بجانب السؤال وقد قسم الإحصائيون الاستمارات الإحصائية حسب طريقة تعبئة الاستمارة إلى نوعين:

- (1) كشف البحث: وهو الكشف الذي يقوم الباحث بتعبئته بنفسه
- (2) صحيفة الاستبيان: وهي التي يقوم الشخص المبحوث بملئها وتسليم إليه إما باليد أو عن طريق البريد ويرفق معها شرح للأسئلة الموجودة بها وكذلك مغلف ملصق عليه الطوابع حتى يشجع الشخص المبحوث على إرجاع صحيفة الاستبيان إلى الجهة المصدرة، ويعاب عليها عدم تجاوب بعض المبحوثين واقتصارها على الأشخاص الملمين بالقراءة والكتابة.

1-2-1: المصادر غير المباشرة (التاريخية)

هي بيانات معدة مسبقا عن ظاهرة ما وباستطاعة الباحث الرجوع إليها وأخذ المعلومات المطلوبة مثل دائرة الإحصاءات العامة ودائرة الأحوال المدنية والوزارات والمؤسسات الخاصة والمؤسسات العامة والمصادر غير المباشرة تشمل الوثائق

والمطبوعات والنشرات الإحصائية التي تصدرها الهيئات في البلاد المختلفة وكذلك الهيئات الدولية مثل هيئة الأمم المتحدة. وكمثال على المصادر التاريخية يمكن أخذ المعلومات عن حالات الوفيات والولادة والزواج والطلاق من سجلات دائرة الأحوال المدنية دون الرجوع إلى الوحدات الأصلية.

أما مميزات هذا المصدر للمعلومات أنه يوفر الوقت والجهد والمال أما عيوبه فمن المحتمل أن تكون البيانات غير دقيقة.

3-1 طرق جمع البيانات أو أساليب جمع البيانات

لعل أهم نقطة للباحث الإحصائي هو كيفية الحصول على البيانات الإحصائية وإمامه طريقان:

أ) المسح الشامل: وذلك بأخذ المعلومات عن جميع مفردات المجتمع قيد الدراسة لدراساتها وهي أفضل الطرق حيث تعطي نتائج دقيقة ومفصلة إلا أن هناك صعوبات كالفحص المدمر لبعض المجتمعات أو التي لا يمكن حصرها كدراسة ملوحة مياه المحيطات التي تحول دون استخدام هذه الطريقة لذا نلجأ إلى طريقة أخرى وهي العينة.

ب) العينة: وهي طريقة تعطي معلومات ونتائج أقل دقة من الأولى حيث أن هناك بعض الأخطاء التي يمكن الوقوع بها وتؤثر على النتائج المعطاة ومنا أخطاء الصدفة أو التحيز. ألا أنها أقل تكلفة وجهدا وتوفر كثيرا من الوقت.

تعريف: العينة جزء من مجتمع الظاهرة قيد الدراسة تؤخذ بطريقة معينة بحيث تكون ممثلة تمثيلا صحيحا للمجتمع بقصد التعرف على خصائص هذا المجتمع.

الاعتبارات التي تدعو إلى استخدام العينات

- توفير الوقت والجهد والنفقات.

- في بعض الاحيان يكون المجتمع المدروس غير محدود ومثال على ذلك كما سبق وأن ذكرنا دراسة ملوحة مياه احدى المحيطات حيث تضطر في هذه الحالة إلى استخدام العينة.

- في بعض الأحيان يؤدي فحص المفردات إلى تدميرها. فالقيام بالمسح الشامل لدم مريض يعني سحب كل دم المريض بغرض تحليله مما يؤدي إلى قتل المريض وفي هذه الحالة لابد من أخذ عينة من دم المريض وفحصها.

1-4) العينة وطرق اختيارها

يوجد نوعان من العينات:

1) العينات العمدية أو الغرضية: ويتم سحبها بطريقة ليست عشوائية وحسب غرض الباحث وتستخدم في الحالات التي يراد منها الحصول على تقديرات تقريبية لتكوين فكرة سريعة عن مشكلة معينة أو لاختبار الاستمارة الاحصائية للتأكد من صلاحيتها.

2) العينات العشوائية: يعني الاختيار العشوائي واتاحة الفرصة امام جميع مفردات المجتمع للظهور في العينة وسنقوم بشرح العينات العشوائية التالية.

أ) العينة العشوائية البسيطة: يتم هذا الاختيار في حالتين:

1) في المجتمعات الصغيرة: أي المجتمعات التي عدد مفرداتها (25) مفردة فأقل في هذه الحالة يتم ترقيم المفردات من 1، 2،، (25) وتكتب على بطاقات وحين يطلب عينة ذات حجم (5) مفردات تسحب بطريقة عشوائية دون ارجاع حتى لا تظهر المفردة مكررة.

2) في المجتمعات الكبيرة: أي المجتمعات التي يزيد عدد مفرداتها عن (25) مفردة فنستخدم جدول الأرقام العشوائية واليك المثال التالي موضحا بالخطوات المتبعة لاستخدام هذه الجداول.

مثال (1-1): مجتمع حجمه 5000 مفردة يُراد سحب عينة حجمها 50 مفردة من هذا المجتمع كيف يتم ذلك مستعيناً بجدول الأرقام العشوائية؟

الحل: للإجابة على هذا السؤال تتبع الخطوات التالية:-

(1) نرقم مفردات المجتمع من 1 الى 5000 بالشكل التالي 1،....، 2،....،، 4999، 5000.

(2) بما ان حجم المجتمع ذو اربع منازل لذا لا بد من التأكد أن جدول الأرقام العشوائية مكون من اربعة منازل وفي حالة توفر جدول ذي خمس منازل فاننا نحذف خانة الآحاد من هذا الجدول.

(3) نبدأ بقراءة الأرقام من جدول الأرقام العشوائية مبتدئين من أقصى اليمين ومن أعلى العمود الأول. آخذين الأرقام التي تقل عن 5000 وغير المتكررة.

(4) نتابع هذه العملية بشكل متسلسل وكلما انتهينا من عمود نبدأ من أعلى العمود المجاور حتى نحصل على حجم العينة المطلوب وإذا انتهى الجدول ولم نحصل على حجم العينة المطلوبة، فاننا نقوم بحذف خانة العشرات ونكرر العملية السابقة مرة أخرى حتى نحصل على الحجم المطلوب، وإذا لم نحصل على الحجم المطلوب نقوم بحذف خانة المئات وهكذا حتى نحصل على الحجم المطلوب واليك بعض هذه الأرقام الواردة في العينة. 1453، 487، 311، 73، ...،

وفيما يلي نقدم نموذجاً لجدول الأرقام العشوائية

22341	21144	13410	63421	39432
27560	48715	43222	89632	31562
33224	14530	44444	67562	21433
37624	86231	40577	38432	22560

20430	32312	42633	47536	67311
30013	11462	47554	43231	68416
42321	12310	56773	59560	97318
62530	14562	47554	60110	73266

ب- العينة العشوائية المنتظمة؛

لاختيار العينة العشوائية المنتظمة نقوم باتباع الخطوات التالية:

- نرقم مفردات المجتمع من 1- حجم المجتمع قيد الدراسة

- نختار عشوائيا مفردة البداية للعينة من الأرقام 1-9

- نحدد مقدار الزيادة المنتظمة من العلاقة.

$$\frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}} = \text{الزيادة المنتظمة}$$

- نضيف مقدار الزيادة المنتظمة على مفردة البداية لنحصل على المفردة التالية المختارة في العينة ونتابع اضافة الزيادة المنتظمة بالتتابع إلى ان نحصل على مفردات العينة المطلوبة.

مثال (1-2) : يراد اختيار عينة حجمها 200 مفردة من مجتمع حجمه 4000 مفردة كيف يتم ذلك بطريقة العينة العشوائية المنتظمة؟

الحل: تتبع الخطوات التالية:

(1) نختار مفردة البداية عشوائيا ولتكن المفردة رقم 8 هي المفردة المختارة

(2) نحدد مقدار الزيادة المنتظمة من العلاقة:

$$\text{مقدار الزيادة المنتظمة} = \frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}} = \frac{400}{200} = 2$$

3) نبدأ بكتابة أرقام العينة بحيث نضيف مقدار الزيادة على مفردة البداية وما تبعها من مفردات.

8، 28، 48، 68، 88، 108، 128،، 388

ج) العينة الطبقية: - نستخدم هذا النوع عندما يكون المجتمع مقسم إلى طبقات ولاختيار عينة بهذه الطريقة تتبع الخطوات التالية:-

- نحدد حجم المجتمع الكبير وليكن (ن)
- نحدد حجم كل طبقة وليكن $n_1, n_2, n_3, \dots, n_r$
- بحيث ان: $n_1 + n_2 + \dots + n_r = N$
- نحدد حجم العينة الكلي وليكن م.
- نحدد حجم العينة الطبقية وليكن $m_1, m_2, m_3, \dots, m_r$
- نجد m_1, m_2, \dots, m_r من العلاقة التالية:

$$m_1 = \frac{n_1}{N} \times M$$

$$m_2 = \frac{n_2}{N} \times M$$

⋮

$$m_r = \frac{n_r}{N} \times M$$

مثال (1-3) : مجتمع حجمه 10000 مفردة مكون من 4 طبقات حجم كل طبقة على التوالي، 1000، 3500، 4000، 1500 مفردة، يراد سحب عينة حجمها 400 مفردة من هذا المجتمع كيف يتم ذلك بحيث تمثل هذه العينة المجتمع تمثيلاً سليماً؟

الحل : من المعطيات ن=10000 ، ن₁=1000 ، ن₂=3500

ن₃=4000 ، ن₄=1500 ، م = 400

ثم نبدأ بتحديد حجم كل عينة جزئية باستخدام العلاقة أعلاها

$$1 \text{ م} = \frac{\text{ن}_1}{\text{ن}} \times \text{م} = 400 \times \frac{1000}{10000} = 40$$

$$2 \text{ م} = \frac{\text{ن}_2}{\text{ن}} \times \text{م} = 400 \times \frac{3500}{10000} = 140$$

$$3 \text{ م} = \frac{\text{ن}_3}{\text{ن}} \times \text{م} = 400 \times \frac{4000}{10000} = 160$$

$$4 \text{ م} = \frac{\text{ن}_4}{\text{ن}} \times \text{م} = 400 \times \frac{1500}{10000} = 60$$

$$\text{م} = 40 + 140 + 160 + 60 = 400$$

(د) العينة متعددة المراحل : عندما يتعذر استخدام الطرق السالفة الذكر لاختيار عينة

من مجتمع ما فأننا نلجأ لأسلوب العينة متعددة المراحل

وسنقوم بتوضيح هذه الطريقة من خلال المثال التالي:-

مثال (1-4): يراد قياس المستوى التحصيلي في كلية مجتمع بطريقة العينة متعددة المراحل كيف يتم ذلك؟

الحل: من المعلوم ان الكلية تشمل على عدة تخصصات، نقوم باختيار تخصص ما عشوائياً كمرحلة اولى.

- كل تخصص به عدة شعب، نقوم باختيار احدى هذه الشعب عشوائيا. وهذه هي المرحلة الثانية.

- نختار عينة حسب الحجم المطلوب عشوائيا من هذه الشعبة وهي المرحلة الثالثة.

1-4: تفرغ البيانات الاحصائية

بعد الانتهاء من جمع البيانات سواء كانت البيانات ميدانية ام تاريخية يقوم الباحث بالعملية التالية وهي: عملية تفرغ البيانات، فاذا كان حجم البيانات صغيرا يتم تفرغها يدويا على جداول معدة لهذا الغرض اما اذا كان حجم البيانات كبيرا فيمكن الاستعانة بالآلات التي تعتمد على نظام البطاقات المثقبة سابقا والاقراص المغنطة والاشربة حاليا وهذا لا يتم الا عن طريق الترميز للبيانات الوصفية حتى لا تأخذ حيزا كبيرا سواء على البطاقات المثقبة او الاقراص حتى تحفظ في الاجهزة الالكترونية والحاسبات الالكترونية لحين الطلب.

1-4-1: التوزيعات التكرارية

تعريف: التوزيع التكراري هو عبارة عن توزيع البيانات المأخوذة عن ظاهرة معينة على الفئات بحيث تقع كل مفردة في فئة واحدة فقط والمفردات التي تقع في فئة واحدة تكون متجانسة. ثم نقوم بعد المفردات التي تقع في الفئة ونضعها في جدول يسمى بالجدول التكراري.

اما اذا كان مدى البيانات صغيرا فانه يمكننا بناء الجدول التكراري بترتيب البيانات ترتيبا تصاعديا حتى نصل إلى أعلى قيمة وهذا يمثل العمود الأول، أما العمود

الثاني فيمثل عدد المرات التي تكررت بها كل مفردة.

مثال (5-1): البيانات التالية تمثل الأجور اليومية لخمسة عشر عاملا بالدينار الأردني مصنفة بالجدول (5-1) .

الأجور اليومية	عدد العمال
3	2
3.5	2
4	2
5	3
5.5	1
6	3
المجموع	15

جدول (5-1)

وهذا مثال على تبويب البيانات في جدول.

وأما اذا كان المدى كبيرا وحجم البيانات ايضا كبيرا فلا بد من تقسيم قيم البيانات الى فئات ذات اطوال متساوية او غير متساوية وتفرغ البيانات على هذه الفئات وهذا مايسمى بالتوزيع التكراري الفئوي وتقوم باتباع الخطوات التالية في انشائه:

(1) نحدد اعلى قيمة للملاحظات وادنى قيمة للملاحظات.

(2) نحدد مدى هذه البيانات من العلاقة.

المدى المطلق = اعلى قيمة مشاهدة - ادنى قيمة + 1 (للدقة)

(3) نحدد عدد الفئات وهذا يكون عادة حسب رغبة الباحث ولكن بشكل عام فان العدد يتراوح $5 \leq$ عدد الفئات ≤ 10 . الا ان بعض الباحثين يرى ان تكون بين $5 \leq$ عدد الفئات ≤ 15 الا ان هذا فيه جهد كبير للباحث.

(4) يحدد طول الفئة وذلك من العلاقة:

المدى المطلق

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى المطلق}}{\text{عدد الفئات}}$$

ويستحسن ان يكون طول الفئة خال من الكسور لتسهيل العمليات الحسابية. وعند ظهور مثل هذه الكسور فلا بد من التخلص منها عن طريق تقريبها الى اعلى وهذا بدوره يؤدي الى نقص في عدد الفئات او مطابقة للفئات المفترضة.

(5) نعين الحد الادنى للفئة الاولى وهو اصغر قيمة مشاهدة.

(6) نحدد الحد الادنى الفعلي للفئة الاولى من العلاقة.

$$\text{الحد الادنى الفعلي للفئة الاولى} = \text{الحد الادنى للفئة الاولى} - \frac{1}{2} \text{ وحدة دقة}$$

(7) نعين الحد الاعلى الفعلي للفئة الاولى من العلاقة.

$$\text{الحد الاعلى الفعلي للفئة الاولى} = \text{الحد الادنى الفعلي للفئة الاولى} + \text{طول الفئة}$$

او نحدد الحد الاعلى للفئة الاولى من العلاقة.

$$\text{الحد الاعلى الفعلي للفئة الاولى} = \text{الحد الاعلى للفئة الاولى} + \frac{1}{2} \text{ وحدة دقة}$$

(8) نجد الحدود الفعلية الدنيا والعليا وكذلك الحدود الدنيا والحدود العليا لباقي الفئات من العلاقات التالية:-

$$\text{الحد الادنى للفئة اللاحقة} = \text{الحد الادنى للفئة السابقة} + \text{طول الفئة}$$

$$\text{الحد الادنى الفعلي للفئة اللاحقة} = \text{الحد الادنى الفعلي للفئة السابقة} + \text{طول الفئة}$$

$$\text{الحد الاعلى الفعلي للفئة اللاحقة} = \text{الحد الاعلى الفعلي للفئة السابقة} + \text{طول الفئة}$$

9) نحدد مراكز الفئات وذلك من خلال إيجاد مركز الفئة الأولى من العلاقة:

$$\text{مركز الفئة الأولى} = \frac{\text{الحِد الأدنى للفئة الأولى} + \text{الحِد الأعلى للفئة الأولى}}{2}$$

2

الحِد الأدنى الفعلي للفئة الأولى + الحِد الأعلى الفعلي للفئة الأولى

2

10) نجد مراكز الفئات اللاحقة من العلاقة:

مركز الفئة اللاحقة = مركز الفئة السابقة + طول الفئة

11) نفرغ البيانات على الفئات باستخدام الخطوط الرأسية لكل تكرار وخط افقي

للتكرار الخامس ونستمر في التفريغ حتى نهاية آخر مشاهدة.

12) نسجل مجموع التكرارات عدديا امام كل فئة لتمثل بعمود التكرارات.

13) نجتمع التكرارات لنقارنها بمجموع المشاهدات حيث يجب التطابق.

مثال (1-6) : البيانات التالية تمثل الاجر الاسبوعي لخمسين موظف في احدى الشركات الصناعية.

57، 43، 46، 24، 44، 38، 19، 54، 49، 57، 29، 53، 45، 47، 41، 37،

49، 56، 47، 29، 31، 32، 51، 52، 42، 45، 28، 43، 49، 34، 24، 42، 28،

39، 21، 18، 37، 34، 29، 23، 35، 43، 39، 41، 26، 27، 32، 37، 28.

المطلوب: انشاء جدول تكراري يمثل جميع ما ورد سابقا.

الحل: نبدأ باتباع الخطوات السابقة.

- نجد المدى المطلق = أكبر قيمة - اصغر قيمة + 1 = 57 - 18 + 1 = 40

- ليكن عدد الفئات 6.

- نجد طول الفئة من العلاقة.

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى المطلق}}{\text{عدد الفئات}} = \frac{40}{6} = 6.66 \approx 7$$

- نعين الحد الأدنى للفئة الأولى وليكن أصغر قيمة وهو 18.

- نعين الحد الأدنى الفعلي للفئة الأولى $17.5 = 18 - 0.5$.

- نعين الحد الأعلى الفعلي للفئة الأولى $17.5 = 17.5 + 7 - 24.5$

- نعين الحد الأعلى للفئة الأولى $24 = 24.5 - 0.5$.

بهذا نكون قد حصلنا على الحدود العليا والدنيا وهي [18، 24] والحدود الفعلية الدنيا والعليا للفئة الأولى وهي [5، 17، 5، 24]. وبإضافة العدد 7 وهو طول الفئة لكل من الحدود الدنيا والعليا السابقة نحصل على الحدود الدنيا والعليا للفئات اللاحقة.

- نعين مركز الفئة الأولى $= \frac{24+18}{2} = 21$ نضيف طول الفئة الى مركز الفئة السابقة لنحصل على مراكز الفئات اللاحقة.

- نفرغ البيانات المعطاة على الفئات التي انشأناها سابقا وذلك بوضع خطوط رأسية وخط مائل للقراءة الخامسة.

- نجمع التكرارات المناسبة في عمود الخطوط ونضع المجموع في عمود التكرارات.

- نتأكد من مطابقة عدد المشاهدات مع مجموع التكرارات.

نلخص كل الخطوات السالفة الذكر في الجدول التالي:

حدود الفئة	الحدود الفعلية للفئة	مركز الفئة	الاشارات	التكرار
(1)	(2)	(3)	(4)	
24-18	24.5-17.5	21	/ IIII	6
31-25	31.5-24.5	28	IIII IIII	9
38-32	38.5-31.5	35	IIII IIII	10
45-39	45.5 - 38.5	42	// IIII IIII	12
52-46	52.5-45.5	49	III IIII	8
59-53	59.5-52.5	56	IIII	5

وطالما اننا بصدد التكرارات فلا بد من التنويه الى التكرار النسبي والتكرار
المثوي وعليه فيكون التكرار النسبي لكل فئة هو.

تكرار الفئة

التكرار النسبي = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{التكرار الكلي}}$

تكرار الفئة

التكرار المثوي للفئة = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{التكرار الكلي}} \times 100\%$

ولتوضيح هذا المفهوم نورد المثال التالي:

مثال (7-1): البيانات التالية تمثل فئات الاجور الاسبوعية لمائة عامل مبينة بالجدول (7-1)

فئات الاجور	34-30	39-35	44-40	49-45	54-50	المجموع
التكرار	5	10	20	25	40	100

جدول (1 - 7)

المطلوب: تكوين جدول التكرار النسبي والتكرار المثوي لهذه البيانات .

الحل: الجدول المطلوب هو جدول (8-1)

الفئات	التكرار لكر	التكرار النسبي	التكرار المئوي
34-30	5	$\frac{5}{100}$	%5
39-35	10	$\frac{10}{100}$	%10
44-40	20	$\frac{20}{100}$	%20
49-45	25	$\frac{25}{100}$	%25
54-50	40	$\frac{40}{100}$	%40
المجموع	100	$1 = \frac{20}{20}$	%100

جدول (1-8)

$$100 = \sum_{i=1}^n f_i \quad \text{نلاحظ أن}$$

1-4-2 التوزيع التكراري المتجمع

في بعض الاحيان نحتاج الى معرفة عدد المفردات التي تساوي او تزيد عن قيمة معينة او تساوي او تقل عن قيمة معينة وحتى نستطيع الحصول على هذه المعلومات لابد من تكوين جدول تكراري متجمع وهو يبين التكرارات المتجمعة لأكبر من فئة وهو نوعان:

(أ) الجدول التكراري المتجمع الصاعد (ب) الجدول التكراري المتجمع الهابط

(أ) الجدول التكراري المتجمع الصاعد

خطوات إنشاء الجدول

- نضيف فئة سابقة وتكرارها صفر
- نحول حدود الفئات الى حدود فعلية اذا كانت الفئات منفصلة.
- نحدث عمودا جديدا يحوي نهاية الفئات.

- نقوم بتجميع التكرارات من اعلى الى اسفل.

مثال(1-8): الجدول التالي يمثل الأجور لخمسة عشر عاملاً كما هو مبين في جدول(1-9)

فئات الأجور	5-3	8-6	11-9	14-12	17-15
عدد العمال	0	2	3	4	6

جدول (1-9)

المطلوب: تكوين جدول متجمع صاعد لهذه البيانات.

الحل: نكون جدول الحل (1-10)

فئات الاجور	عدد العمال	الحدود الفعلية	نهاية الفئات	التكرار المتجمع الصاعد
5-3	صفر	5.5-2.5	اقل من 5.5	صفر
8-6	2	8.5-5.5	اقل من 8.5	2
11-9	3	11.5-8.5	اقل من 11.5	5
14-12	4	14.5-11.5	اقل من 14.5	9
17-15	6	17.5-14.5	اقل من 17.5	15
المجموع	15			

جدول (1-10)

نلاحظ على الجدول ما يلي:

1) التكرار الصاعد المناظر للفئة الأولى يساوي تكرار الفئة الأولى.

(2) التكرار المتجمع الصاعد المناظر للفتة الأخيرة يساوي مجموع التكرارات كلها.

ب) الجدول التكراري المتجمع الهابط

خطوات انشاء الجدول:

(1) نضيف فتة لاحقة وتكرارها صفر.

(2) نحول حدود الفئات الى حدود فعلية اذا كانت الفئات منفصلة.

(3) نحدث عمودا جديدا يحوي على بداية الفئات.

(4) نقوم بتجميع التكرارات من أسفل الى اعلى

والان نطبق هذه الخطوات على المثال السابق ليظهر في جدول (1-11).

فئات الاجور	عدد العمال	الحدود الفعلية	بداية الفئات	التكرار المتجمع الهابط
8-6	2	8.5-5.5	اكتر من 5.5	15
11-9	3	11.5-8.5	اكتر من 8.5	13
14-12	4	14.5-11.5	اكتر من 11.5	10
17-15	6	17.5-14.5	اكتر من 14.5	6
20-18	صفر	19.5-17.5	اكتر من 17.5	صفر

جدول (1 - 11)

ونلاحظ على الجدول ما يلي:-

1- ان التكرار المتجمع الهابط للفتة الأولى يساوي مجموع التكرارات.

2- ان التكرار المتجمع الهابط للمناظر للفتة الأخيرة يساوي تكرار الفتة الأخيرة كما ونستطيع ان نعرف من الجدول ان عدد الذين تزيد اجورهم مثلاً عن 8 دينار هو 13 موظفاً وعدد الذين تزيد أجورهم عن 11.5 دينار هو 10 موظفين

أما بالنسبة لجدول التكرار المتجمع الصاعد فاننا نستطيع إيجاد عدد الذين تقل أجورهم مثلاً عن 8.5 دينار وهما موظفان او من تقل رواتبهم عن 14.5 دينار (وهم تسعة موظفين).

وفي نهاية التوزيعات التكرارية لا بد من القاء الضوء على بعض النقاط الهامة التي فاتنا ذكرها.

1-4-3: الجداول المقفلة والمفتوحة؛

تعريف: الجدول المقفل هو الجدول الذي تكون فيه الفئة الاولى والفئة الاخيرة محددة. اما الجدول المفتوح من طرفه الادنى فهو الجدول الذي تكون فيه بداية الفئة الاولى غير محددة. اما الجدول المفتوح من طرفه الاعلى فهو الجدول الذي تكون نهاية الفئة الاخيرة غير محدودة. اما اذا كانت بداية الفئة الاولى غير محددة ونهاية الفئة الأخيرة غير محددة فيكون الجدول مفتوحاً من كلا طرفيه ويمكن التوضيح بالمثال التالي:-

اقل من 3	اقل من 3	6-3	اقل من 3
6-3	6-3	6-3	6-3
10-7	10-7	10-7	10-7
14-11	14-11	14-11	14-11
اكبر من 14	اكبر من 14	اكبر من 14	
مفتوح من كلا طرفيه	مفتوح من طرفه الاعلى	مفتوح من طرفه الادنى	مفتوح من طرفه الادنى

جدول رقم (1-12) جدول رقم (1-13) جدول رقم (1-14) جدول رقم (1-15)

وكلما كان الجدول مقفلاً كلما كانت العمليات الحسابية اسهل.

1-4-4: الجداول المنتظمة وغير المنتظمة:

تعريف: الجدول المنتظم هو الجدول الذي تكون فيه اطوال الفئات متساوية.

تعريف: الجدول غير المنتظم هو الجدول الذي تكون فيه اطوال الفئات غير متساوية.

- في حالة انشاء جدول تكراري فان الباحث يقوم بافراض عدد الفئات لانه لا يوجد قاعدة عامة يعتمد عليها في تحديد عددها الا انه يجب مراعاة الاعتبارات التالية عند تحديد عدد الفئات:

(1) حجم البيانات وتباينها وتجانسها

(2) النتيجة التي يريد الباحث الوصول إليها أن تكون دقيقة او تقريبية.

تعريف: الفئة عبارة عن مجموعة جزئية محددة بمحددين الاصغر. ويسمى الحد الادنى والاكثر ويسمى الحد الاعلى والمفردات الموجودة في الفئة متقاربة ويفضل ان تكون اطوال الفئات متساوية لكي تسهل العمليات الحسابية.

- **تعيين حدود الفئات:** عند تعيين حدود الفئات التي يجب أن تأخذ بعين الاعتبار عدم تداعل هذه الحدود وهذا يعتمد على معرفتنا لتوعين من البيانات هما:-

(1) البيانات المأخوذة عن ظاهرة منفصلة وتأخذ قيما صحيحة مثل اعداد السيارات، البيوت، الطلاب، الطائرات... الخ.

فلو كانت البيانات المتوفرة لدينا عن اعداد الطائرات الهابطة في مطار عمان الدولي ولمدة مئة يوم ولو فرضنا ان اقل يوم هبطت في المطار بـ 20 طائرة واكثر يوم هبطت فيه 43 طائرة. نلاحظ بأن هذه الظاهرة هي ظاهرة منفصلة (وثابة) والبيانات المأخوذة عنها اعداد صحيحة ولو فرضنا ان طول الفئة يساوي (5) وحدات فان افضل شكل لكتابة هذه الفئات هي الفئات التي يوجد بها ثغرة مقدارها واحد صحيح يمين الحد الاعلى للفئة والحد الادنى للفئة التي تليها وتكون بالصورة التالية:-

20-24، 25-29، 30-34، 35-39، 40-44 ونلاحظ انه يوجد ثغرة مقدارها

واحد صحيح بين 24، 25، 30، 34، 35... الخ وهذه الفئات غير متداخلة.

وتعامل مع هذه الفئات بالحدود الفعلية لها فان الحدود الفعلية للفئة الاولى 19.5 - 24.5... الخ ويمكن استخراج طول الفئة لهذا النوع من الفئات عن طريق العلاقة التالية:

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{الحد الاعلى الفعلي} - \text{الحد الادنى الفعلي}}{\text{العدد}} \quad (2)$$

البيانات المأخوذة عن ظاهرة متصلة (مستمرة) وتأخذ قيما كسرية مثل البيانات عن الاطوال، الاوزان، الاحجام، المسافات.... الخ. فلو فرضنا ان لدينا بيانات عن اوزان 50 رجلا (ظاهرة متصلة) وكان اقل مشاهدة هي 55 كغم واكثر مشاهدة 70 كغم ان البيانات في هذه الحالة تأخذ قيما كسرية وافضل طريقة لكتابة الفئات هي ان تبدأ الفئة بنفس القيمة التي تنتهي فيها الفئة السابقة ولو كان طول الفئة 4 وحدات فان الفئات تكتب بالصورة التالية:

الفئات

55 وأقل من 59

59 وأقل من 63

63 وأقل من 67

67 وأقل من 71

ان هذه الفئات غير متداخلة ولا يوجد بينها ثغرات فالقمة الاولى تعني ان جميع الذين تقع اوزانهم بين 55 كغم واقل من 59 كغم تقع ضمن الفئة الاولى اما الرقم (59) فيقع في الفئة الثانية وهكذا.

الفئات غير المتساوية: في حالة بروز فئات غير متساوية في بعض الجداول التكرارية فاننا نلجأ لحساب التكرار المعدل والذي يمكن الحصول عليه من العلاقة التالية :

تكرار الفئة الأصلية

$$\text{تكرار الفئة المعدل} = \frac{\text{تكرار الفئة الأصلية}}{\text{طول الفئة}}$$

طول الفئة

وبعد ذلك نقوم بالحسابات المطلوبة كالمعتاد لتوضيح هذا المفهوم نقوم بإعطاء المثال التالي.

مثال (1-9) : الجدول (1-16) يمثل توزيع القوى العاملة في الأردن حسب السن (بالآلف) لسنة 1970 والمطلوب عمل تكرار معدل لعمود التكرارات.

العمر	-10	-15	-20	-25	-30	-40	-50	-60	65 فما فوق
عدد العمال	10	70	106	89	133	79	45	14	15

جدول (1-16)

الحل : نلاحظ من الجدول أعلاه أن الفئات غير متساوية لذا نقوم بعمل جدول التكرار المعدل والمبين في جدول (1-17):

فئات العمر	عدد العمال	التكرار المعدل
-10	10	$2 = \frac{10}{5}$
-15	70	$14 = \frac{70}{5}$
-20	106	$21.6 = \frac{106}{5}$
-25	89	$17.8 = \frac{89}{5}$
-30	133	$13.3 = \frac{133}{10}$
-40	79	$13.3 = \frac{133}{10}$
-50	45	$7.9 = \frac{79}{10}$
-60	45	$4.5 = \frac{45}{10}$
-65 فما فوق	14	$2.8 = \frac{14}{5}$
	15	$3 = \frac{15}{5}$

جدول (1-17)

مثال (1-10): البيانات التالية تمثل أطوال وأوزان 30 طالباً مبيّنة بالجدول (1-18)

الطول	الوزن	الطول	الوزن	الطول	الوزن	الطول	الوزن	الطول	الوزن	الطول	الوزن
160	53	171	68	169	68	170	68	150	51	160	55
165	54	178	74	167	70	179	75	175	53	171	65
162	60	177	69	171	65	184	80	168	62	175	69
167	58	179	77	155	50	172	61	159	75	181	54

جدول (1-18)

المطلوب:

- (1) تكوين جدول تكراري مزدوج لهذه البيانات
- (2) عدد الطلاب الذين أوزانهم تراوح بين 55 وتقل عن 70
- (3) عدد الطلاب الذين أوزانهم 60 فما فوق وأطوالهم 160 سم فما فوق
- (4) عدد الطلاب الذين أطوالهم 165 فما فوق
- (5) أوجد التوزيع الهامشي لقيم س والتوزيع الهامشي لقيم ص.

الحل: (1) نبدأ أولاً بتكوين الجدول التكراري المزدوج في جدول (1-19)

العمود	فئات الأوزان ص							س فئات الأطوال
	85-80	-75	-70	-65	-60	-55	-50	
3		/					//	-155
4					//	/	/	-160
7			/	/	///	/	/	-165
7		/	/	////	/			-170
6		//	/	//			/	-175
3	//						/	185-180
30	2	4	3	7	6	2	6	العمود

جدول (1-19)

(2) عدد الطلاب = $15 = 7 + 6 + 2$

(3) عدد الطلاب = 21

(4) عدد الطلاب = $23 = 3 + 6 + 7 + 7$

(5) التوزيع الهامشي لقيم \bar{x} كما في جدول (1-20)

الاطوال	التكرار
-155	3
-160	4
-165	7
-170	7
-175	6
185 - 180	3
	30

جدول (1 - 20)

والتوزيع الهامشي لقيم \bar{y} كما في الجدول (1 - 21)

الاوزان	التكرار
-50	6
-55	2
-60	6
-65	7
-70	3
-75	4
85-80	2
	30

جدول (1-21)

مثال (11-1): أكتب التكرار المعدل للبيانات في الجدول التالي :

الفئات	-150	-155	-165	195-185
التكرار	15	50	50	30

الحل : نكون جدول الحل (1-22).

الفئات	التكرار	التكرار المعدل
-150	15	$3 = \frac{15}{5}$
-155	50	$5 = \frac{50}{10}$
-165	50	$2.5 = \frac{50}{20}$
195-185	30	$3 = \frac{30}{10}$

جدول (1-22)

مع ملاحظة أنه لايجاد التكرار المعدل نجده من العلاقة التالية:

$$\text{التكرار المعدل للفترة} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول الفئة}}$$

ملاحظة : التكرار المعدل لا يوجد إلا للحالات التي تكون فيها الفئات غير منتظمة

ونادراً ما يستعمل عندما تكون الفئات متساوية

مثال: البيانات التالية تمثل فئات الأجور لخمسين عاملاً مبيئة بالجدول (1-23):

فئات الأجور	التكرار
-40	8
-60	12
-80	20
-100	6
140-120	4
المجموع	50

جدول (1-23)

- المطلوب: (1) إيجاد عدد العمال الذين تقل أجورهم عن 80 دينار.
 (2) عدد العمال الذين تقل أجورهم عن 55 دينار.
 (3) نسبة العمال الذين يتقاضون أجراً يزيد عن 90 دينار.
 (4) نسبة العمال الذين يتقاضون اجرا بين 55-90.
 (5) عدد العمال الذين تقل أجورهم عن 90 دينار.
 (6) إيجاد قيمة الاجر الذي يستحق صاحبه الدعم والاجر الاعلى الذي يستحق صاحبه المكافأة اذا اتفق على ان تكون النسبة الاولى 8٪ من العمال والنسبة التالية 12٪ من العمال.

الحل: (1) عدد العمال الذين تقل أجورهم عن $80 = 12 + 8 = 20$ عاملاً.

(2) طول الفترة $20 = 40 - 60$ ، $15 = 40 - 55$ الفرق في الراتب

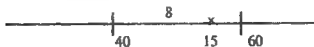
والآن نقوم بعمل نسبة وتناسب

$$8 \leftarrow 20$$

$$\begin{array}{ccc} 20 & 8 & \leftarrow 15 \text{ س} \\ \hline 15 & \text{س} & \end{array} =$$

$$\text{وبالضرب التبادلي فإن: } 20 \text{ س} = 120 \therefore \text{س} = \frac{120}{20} = 6$$

\therefore عدد العمال = 6 عمال الذين تقل أجورهم عن 55 دينار.

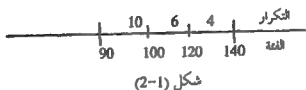


شكل (1-1)

(3) $100 = 80 - 20$ طول الفترة

$$10 = 80 - 90$$

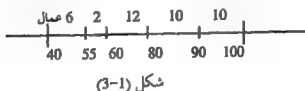
$$\begin{aligned}
 & 20 \leftarrow 20 \\
 & 10 \leftarrow \text{س} \leftarrow 20 \\
 & 20 = \text{س} \quad \leftarrow \frac{20}{\text{س}} = \frac{20}{10} \\
 & 10 = \frac{200}{20} = \text{س} \quad \therefore
 \end{aligned}$$



بمجموع العمال الذي تزيد رواتبهم عن 90 دينار = 20+6+10=20 عامل

$$\%40 = \%100 \times \frac{20}{50} = 90 \text{ رواتبهم عن}$$

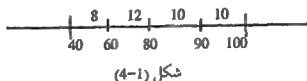
(4) عدد العمال الذين تقع رواتبهم بين 55، 90=10+12+2=24 عامل



نسبة العمال الذين رواتبهم بين (55-90)

$$\%48 = \%100 \times \frac{24}{50} =$$

(5) عدد العمال الذين تقل اجورهم عن 90 دينار = 10+12+8=30 عاملا



$$\text{النسبة} = \frac{30}{50} \times 100\% = 60\%$$

$$(6) \text{ النسبة الأولى} = \frac{80}{100} \times 50 = 40 \text{ عمال}$$

$$20 \leftarrow 8$$

$$\text{س} \leftarrow 4 \Leftarrow \frac{20}{\text{س}} = \frac{8}{4} \Leftarrow 8 \text{ س} = 80$$

$$\therefore \text{س} = 10$$

$$\text{الاجر الذي يستحق الدعم} = 40 + 10 = 50$$

$$\text{عدد الاشخاص الذين يستحقون المكافأة} = 50 \times \frac{12}{100} = 6.$$

1-5) عرض البيانات:

بعد جمع وتبويب البيانات يأتي عرض البيانات وهذا يساعد الناظر على أخذ فكرة سريعة عن الظاهرة قيد الدراسة دون تعب واجهاد ويوجد عدة طرق للعرض نذكر اهمها.

1-5-1) العرض الجدولي:

يكتسب العرض الجدولي اهمية كبرى بعد أن يقوم الباحث بتفريغ البيانات الاحصائية ضمن جداول لها ميزات رئيسية منها:

- ان يكون للجدول عنواناً كاملاً مختصراً معبراً عما يحويه الجدول من بيانات.
- أن يضع عناوين بارزة لكل من الصفوف والأعمدة.
- أن يعطي لكل جدول رقم معين.

- أن تحدد الوحدات المستخدمة في الجدول حسب البيانات الموجودة.
- أن ترتب البيانات في الجدول حسب الأهمية والتسلسل الزمني.
- ذكر المصادر المستقى منها البيانات.
- أن توضع الملاحظات الخاصة عن الجدول.

أما هذه الفئات ومن أجل الاختصار فيمكن كتابتها بتحديد بداية الفئات وتترك نهايتها لتحديد ضمنا من الفئة التالية لها وفي هذه الحالة تحدد نهاية الفئة الأخيرة كما في الجدول التالي:

الفئات المفتوحة:

-55

-59

-63

71-67

وللعلم ان هذا النموذج من الفئات يمكن استخدامه لبيانات كل من الظاهرتين المنفصلة والمتصلة.

ويمكن إيجاد طول الفئة من العلاقة التالية

طول الفئة = الحد الأدنى للفئة اللاحقة - الحد الأدنى للفئة السابقة.

$$= 59 - 55 = 4$$

الجدول التكراري المزدوج:

مثال (1-12): الجدول (1-24) يمثل اعداد الطلبة في كلية الهندسة تخصصاتهم وسنواتهم الدراسية.

المجموع	هندسة كيمائية	هندسة معمارية	هندسة مدنية	التخصص / السنة
90	20	30	40	الأولى
105	15	40	50	الثانية
105	25	20	60	الثالثة
170	60	60	50	الرابعة
470	120	150	200	المجموع

جدول (1 - 24)

* يتم قبول الطلبة في السنة الاولى بعد امتحان القبول
المصدر: وزارة التعليم العالي

1-5-2 العرض الهندسي للبيانات المنفصلة :

أ) الأعمدة او المستطيلات

ب) العرض استخدام الصور

ج) العرض استخدام الدوائر

د) الخط البياني

أ- العرض باستخدام المستطيلات (او الأعمدة)

- كثيرا ما نرى من خلال زيارتنا الى المؤسسات المختلفة هذا النوع من التمثيل مما يدل على انتشار هذه الطريقة بشكل واسع ولاستخدام هذه الطريقة تتبع الخطوات التالية:
- نرسم احدائين يلتقيان في نقطة الاصل. يمثل المحور الاول القيمة الوصفية والمحور الثاني القيمة العددية للقيمة المقابلة للقيمة الوصفية.
- اختيار مقياس رسم مناسب يتناسب مع حجم الورقة وحجم القيم العددية.
- رسم مستطيلات ذات قواعد متساوية وتتناسب اطوالها مع الاعداد التي يمثلها. وكذلك تكون متباعدة بعدا مناسباً.
- عند مقارنة ظاهرتين او اكثر تكون المستطيلات المقارنة متلاصقة.

مثال (1-13): البيانات التالية تمثل اعداد الطلبة في السنة الاولى والثانية والثالثة لطلبة كلية الاداب في جامعة ما حسب تخصصاتهم.

السنة \ التخصص	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	علم الاجتماع	علم النفس	المجموع
الاولى	200	150	120	100	570
الثانية	150	210	115	125	600
الثالثة	80	120	80	70	350
المجموع	430	480	315	295	1520

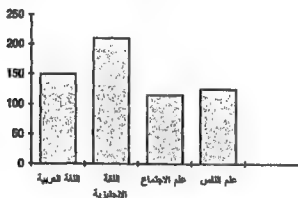
جدول (1-25)

والمطلوب تمثيل هذه البيانات

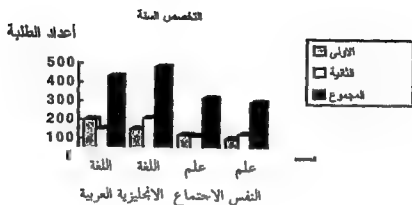
(1) بالمستطيلات لطلاب السنة الثانية حسب تخصصاتهم.

(2) قارن بالاعمدة بين طلاب السنة الاولى والثانية حسب تخصصاتهم.

اعداد الطلبة



شكل (1-6)



شكل (1-7)

ب- العرض بطريقة الصور

في هذه الطريقة تكون الصورة المعبرة عن البيانات المراد عرضها كوسيلة إيضاحية تجذب انتباه المشاهد. مثال على ذلك: عند التعبير عن إنتاج شركة مرسيلس للسيارات في سنوات مختلفة فكل صورة لسيارة تمثل 1000 سيارة فتضع عدد من الصور بقدر إنتاج الشركة لتلك السنة، وبدلاً من صورة سيارة المرسيلس سنضع العلامة التجارية لها.

مثال (1-14): البيانات التالية هي بيانات افتراضية تمثل إنتاج أحد مصانع شركة المرسيلس في منطقة بافاريا خلال السنوات 1983/1981 والمطلوب تمثيل هذه البيانات بالصور.

السنة	كمية الإنتاج	الصور (صورة واحدة لكل ألف سيارة)
1981	3000	
1982	4000	
1983	6000	

شكل (1-8)

ج) العرض بطريقة الدوائر:

تعتبر هذه الطريقة من افضل الطرق لتمثيل البيانات ذات الصفة المشتركة وتستطيع بواسطتها ان تقارن الاجزاء بعضها البعض ثم الجزء (القطاع الدائري) بالكل (الدائرة) وتنبع الخطوات التالية:-

(1) نستخرج زاوية قطاع الدائرة من العلاقة التالية:-

$$\text{زاوية القطاع} = \frac{\text{قيمة الجزء المحدد}}{\text{المجموع الكلي للأجزاء}} \times 360^\circ$$

حيث ان 360 هي الزاوية المركزية للدائرة.

(2) نقوم برسم دائرة معينة ونرسم عليها نصف قطر.

(3) نرسم الزاوية المركزية التي ضلعها الابتدائي نصف القطر والمثلة بالقطاع.

مثال (1-15): بستان به 1080 شجرة مثمرة موزعة كما في الجدول التالي:-

نوع الشجر	العدد
تفاح	180
اجاص	540
عنب	90
دوراق	270
المجموع	1080

جدول (1 - 26)

والمطلوب تمثيل هذه البيانات بالقطاع الدائري

الحل: نجد زوايا القطاع لجميع اصناف الاشجار المثمرة

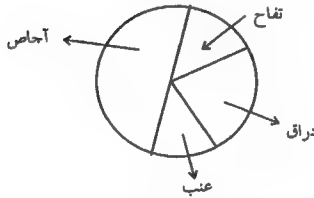
$$\text{زاوية القطاع (للفاح)} = 360 \times \frac{180}{1080} = 60^\circ$$

$$\text{زاوية القطاع (للاجاص)} = 360 \times \frac{540}{1080} = 180^\circ$$

$$\text{زاوية القطاع (عنب)} = 360 \times \frac{90}{1080} = 30^\circ$$

$$\text{زاوية القطاع (دراق)} = 360 \times \frac{270}{1080} = 90^\circ$$

ومجموع هذه الزوايا يجب ان يساوي 360°



شكل (1 - 9)

(د) التمثيل بالخط البياني:

وهو يوضح العلاقة بين ظاهرتين او اكثر بحيث تمثل على المحور الافقي المسميات او الزمن وعلى المحور الرأسى قيم الظاهرة مع اختيار مقياس رسم مناسب.

مثال (1-16): البيانات التالية تبين اعداد المواليد والوفيات في احدى البلدان خلال السنوات 1980 / 1984. مثل هذه البيانات بالخط البياني:

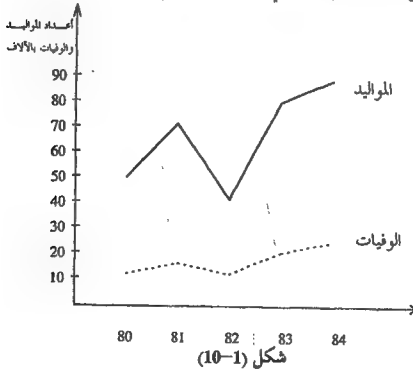
المواليد والوفيات بالآلاف

السنة	المواليد	الوفيات
1980	50	10
1981	70	12
1982	40	8
1983	80	14
1984	85	16

جدول (1-27)

- الحل: (1) نرصد السنوات التي على المحور الافقي وقيم الظاهرة على المحور الرأسي.
- (2) نرصد النقاط على الرسم البياني والتي مساقتها الافقية السنوات والعمودية قيم الظاهرة.

(3) نصل بين النقطة والنقطة التي تليها بخط مستقيم او خطوط متقطعة.



1- 6 : تمثيل الجداول التكرارية :

ويتم ذلك بأحد الأشكال التالية:-

أ- المدرج التكراري:

تعريف: المدرج التكراري عبارة عن مستطيلات متلاصقة مقامه على محور الفئات، قواعدها أطوال الفئات وارتفاعاتها تكرار كل فئة وللحصول على هذا المدرج تتبع الخطوات التالية:-

- نرسم محورين متعامدين أحدهما يمثل الفئات الفعلية في حالة الفئات المنفصلة والآخر يمثل التكرارات

- نرصد بداية الفئات الفعلية وعندما نصل الى نهاية اخر فئة نرصد حدها الاعلى.

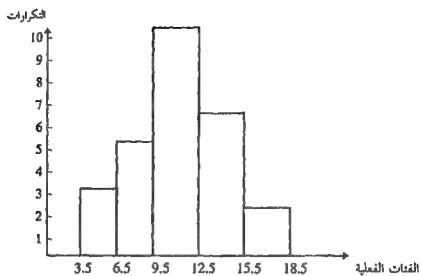
- نقيم مستطيلات متلاصقة قواعدها الفئات الفعلية وارتفاعاتها التكرارات المقابلة لكل فئة.

مثال (1-17): مثل الجدول التكراري (1-28) بالمدرج التكراري

الحدود الفعلية	التكرارات	الفئات
6.5 - 3.5	3	6-4
9.5-6.5	5	9-7
12.5-9.5	10	12-10
15.5-12.5	6	15-13
18.5-15.5	2	18-16

جدول (1-28)

الحل: بالاستفادة من البيانات السابقة نرسم المدرج ادناه.



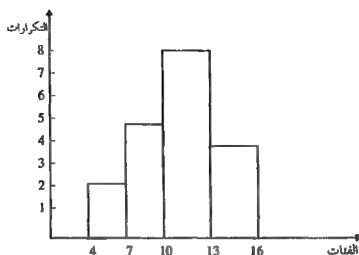
شكل (1-11)

مثال (1-18): مثل الجدول التكراري (1-29) بالدرج التكراري.

التكرارات	الفئات
2	4 وأقل من 7
5	7 وأقل من 10
8	10 وأقل من 13
4	13 وأقل من 16

جدول (1-29)

الحل: في هذا الجدول نستخدم الفئات المتصلة:



شكل (1-12)

ب) المضلع التكراري:

يمكن رسم المضلع التكراري للجدول التكراري بطريقتين.

(1) باستخدام المدرج التكراري.

(2) باستخدام مراكز الفئات.

1) باستخدام المدرج التكراري

في هذه الحالة نتبع الخطوات التالية :-

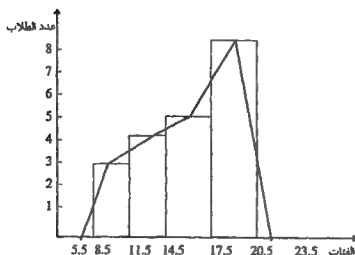
- اضافة فئة سابقة وفئة لاحقة وتكرار كل منهما صفر الى الجدول التكراري وذلك لاجلاق المضلع من كلا طرفيه على المحور الأفقي.
- رسم المدرج التكراري حسب الخطوات السابقة.
- نتصف قواعد المستطيلات العليا.
- نصل بين كل نقطة والنقطة التي تليها بخط مستقيم فيكون الشكل الناتج هو المضلع التكراري.

مثال (1-19) : البيانات التالية تمثل علامات 30 طالب من 20 موزعة كما في الجدول التكراري (1-30) والمطلوب رسم المصّلع التكراري باستخدام المدرج التكراري.

فئات العلامات	عدد الطلاب	الفئات الفعلية
8-6	صفر	5.5 - 8.5
11-9	3	8.5 - 11.5
14-12	4	11.5 - 14.5
17-15	5	14.5 - 17.5
20-18	8	17.5 - 20.5
23-21	صفر	20.5 - 23.5

جدول (1-30)

الحل: من البيانات السابقة واتباع الخطوات نرسم الشكل (1 - 13)



شكل (1-13)

(2) رسم المضلع باستخدام مراكز الفئات.

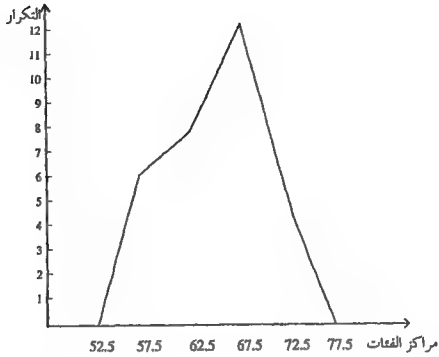
نقوم باتباع الخطوات التالية:-

- نرسم محورين متعامدين الافقي يمثل مراكز الفئات . والعمودي يمثل التكرارات
- نحدد مركز الفئات .
- نعين النقاط على الرسم البياني حيث كل نقطة مسقطها الاول مركز الفئة والمسقط الثاني التكرار للفئة.
- نصل بين النقاط بشكل متتابعي.
- للحصول على مضلع تكراري مغلق نأخذ مركز فئة سابق بتكرار صفر ومركز فئة لاحق بتكرار صفر أيضاً.

مثال (1-20): البيانات التالية تمثل أوزان 30 طالبا مبنوبة بالجدول (1-31):-

مراكز الفئات	التكرار	فئات الاوزان
52.5	صفر	-50
57.5	6	-55
62.5	8	-60
67.5	12	-65
72.5	4	-70
77.5	صفر	80-75

جدول (1-31)



شكل (14-1)

ويجدر بنا ان نذكر انه في حالة رسم المضلع التكراري باستخدام المدرج التكراري فان المساحة التي يحصرها المضلع مساوية للمساحة التي يحصرها المدرج التكراري لان المضلع يحذف اجزاء من المدرج ويضيف له اجزاء وهذه أي المحذوفة والمضافة متساوية في المساحة.

جـ - المنحنى التكراري لرسم المنحنى التكراري تتبع نفس الخطوات التي اتبعناها في رسم المضلع التكراري ولكن الفرق بينهما ان الوصل بين النقطة والنقطة التي تليها في المنحنى تكون بخطوط منحنية اما في المضلع بخطوط مستقيمة . وعادة يستخدم المنحنى في الحالات التي تكون فيها البيانات كبيرة الحجم وذات فئات اطوالها صغيرة والمتغير مستمر مثل الزمن، الاطوال، الاوزان... الخ.

د- تمثيل الجداول التكرارية المتجمعة بيانيا.

1- المضلع التكراري المتجمع الصاعد.

2- المضلع التكراري المتجمع الهابط.

مثال (1-12) : الأرباح السنوية بآلاف الديناري ل 30 محلا من كبرى المحلات التجارية في مدينة ما موزعة كما يلي والمطلوب تمثيل هذا الجدول بالمضلع التكراري المتجمع الصاعد والمابط.

فئات الربح	14-10	19-15	24-20	29-25	34-30
التكرار	0	4	6	15	5

الحل : نكون جدول الحل (1-32).

فئات الربح	التكرار	الحدود الفعلية	نهاية الفئات	التكرار المتجمع الصاعد
14-10	صفر	9.5 - 14.5	اقل من 14.5	صفر
19-15	4	14.5-19.5	اقل من 19.5	4
24-20	6	19.5-24.5	اقل من 24.5	10
29-25	15	24.5 - 29.5	أقل من 29.5	25
34-30	5	29.5-34.5	اقل من 34.5	30

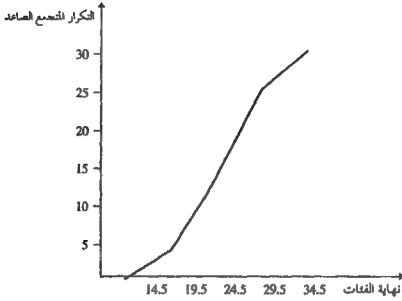
جدول (1 - 32)

ثم نبدأ باتباع خطوات رسم المضلع التكراري الصاعد.

خطوات رسم مضلع تكراري متجمع صاعد

- (1) ننشأ الجدول التكراري المتجمع الصاعد كالجدول السابق.
- (2) نرسم سحطين متعامدين ونمثل على المحور الافقي نهاية الفئات وعلى المحور الرأسي التكرار المتجمع الصاعد.
- (3) نرصد النقاط على الرسم البياني والتي مساقطها الافقية نهاية الفئات والرأسية التكرارات المتجمعة الصاعدة.

4- نوصل بخط مستقيم بين النقطة والنقطة التي تليها.



شكل (15-1)

أما المنحني التكراري المتجمع الصاعد فتتبع في رسمه نفس الخطوات التي اتبعت في رسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد والفرق الوحيد هو ان نوصل بين النقطة والنقطة التي تليها بخط منحني بدلا من الخط المستقيم.

(2) المضلع التكراري المتجمع الهابط

لرسم المضلع تتبع الخطوات التالية:-

- (1) ننشئ جدول تكراري متجمع هابط.
- (2) نرسم خطين متعامدين ونمثل على المحور الافقي بداية الفئات وعلى المحور الرأسي التكرار المتجمع الهابط.
- (3) نرصد النقاط على الرسم البياني والتي مساقطها الافقية بداية الفئات والرأسية التكرارات المتجمعة الهابطة.

(4) نصل بخط مستقيم بين النقاط المتتالية.

فئات الربح	التكرارات	الحدود الفعلية	بداية الفئات	التكرار المتجمع الهابط
19-15	4	19.5-14.5	أكبر من 14.5	30
24-20	6	24.5-19.5	أكبر من 19.5	26
29-25	15	29.5-24.5	أكبر من 24.5	20
34-30	5	34.5-29.5	أكبر من 29.5	5
39-35	صفر	39.5-34.5	أكبر من 34.5	صفر

جدول (1-33)

وعند رسم منحنى متجمع هابط تتبع نفس الخطوات ولكن نصل بين النقاط بالمنحنى.

مثال (1-22): الجدول التالي يمثل فئات الأجور لمائة عامل مبينة بالجدول التالي:

الفئات	-70	-80	-90	-100	110-120	المجموع
التكرار	8	22	40	25	5	100

المطلوب: (1) أوجد مراكز الفئات لهذه الفئات.

(2) أوجد عدد العمال الذين تزيد أجورهم عن 80 أو تساويه.

(3) أوجد عدد العمال الذين تزيد أجورهم عن 100 أو تساويه.

(4) أوجد عدد العمال الذين تقل أجورهم عن 90.

(5) أرسم المدرج التكراري لهذا التوزيع.

(6) أرسم المضلع التكراري لهذا التوزيع.

(7) أرسم المنحنى التكراري لهذا التوزيع.

(8) أرسم للمنحنى المتجمع الصاعد لهذا.

(9) أرسم للمنحنى المتجمع الهابط لهذا التوزيع.

الحل: نكون جدول الحل (1-34):

تكرار هابط	فئات أكبر من \leq	تكرار صاعد	فئات أقل من $>$	مركز الفئة	التكرار	فئات الأجور
100	$70 \leq$	صفر	$70 >$	75	8	-70
92	$80 \leq$	8	$80 >$	85	22	-80
70	$90 \leq$	30	$90 >$	95	40	-90
30	$100 \leq$	70	$100 >$	105	25	-100
5	$110 \leq$	95	$100 >$	115	5	120-110
0	$120 \leq$	100	$120 >$		100	

جدول (1-34)

الحد الأدنى للفئة الأولى + الحد الأعلى للفئة

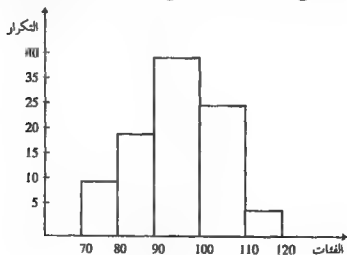
$$(1) \text{ نجد مركز الفئة} = \frac{\quad}{2}$$

$$(2) \text{ عدد العمال} = 5 + 25 + 40 + 22 = 92$$

$$(3) \text{ عدد العمال} = 5 + 25 = 30$$

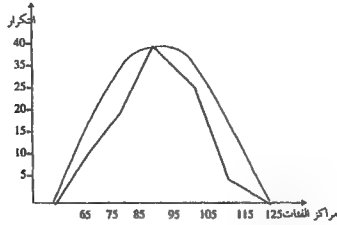
$$(4) \text{ عدد العمال} = 8 + 22 = 30$$

(5) أم المدرج التكراري لهذا التوزيع فهو كما في شكل (1-17).



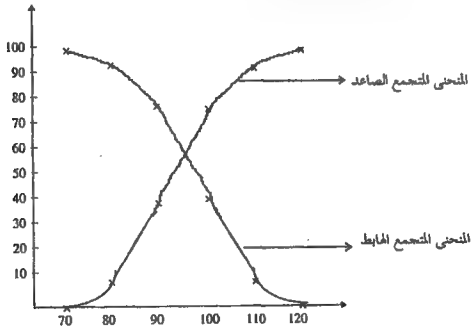
شكل (1-17)

(7 + 6) أما المنحنى والمضلع التكراري لهذا التوزيع فهو كما في شكل (1-18).



شكل (1 - 18)

نستنتج من الرسم أن المضلع مفتوح ولجعله مغلقاً نأخذ فئة سابقة وفئة لاحقة بتكرار صفر ثم نصل مع النقاط الجديدة لكي يصبح المضلع مغلقاً.
(8 + 9) المنحنى المطلوب هو:



شكل (1 - 19)

7-1 أنواع المنحنيات:

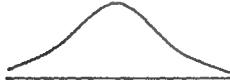
1- من حيث الالتواء والتماثل:



شكل (٢١-١)
منحنى متماثل حول الوسط

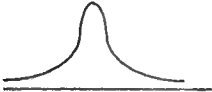


شكل (20-١)
منحنى مائل نحو اليمين

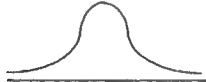


شكل (22-١)
منحنى مائل نحو اليسار

2) من حيث التدهيب :



شكل (٢٤-١)
منحنى منطبع



شكل (٢٣-١)
منحنى متماثل

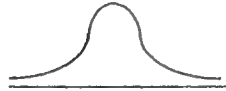


شكل (٢٥-١)
منحنى مفرطح

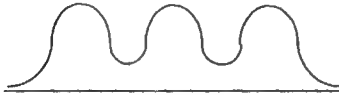
(3) من حيث عدد القمم:



شكل (١ - ٢٧)
منحنى ذاتي القمة



شكل (١ - ٢٦)
منحنى وحيد القمة

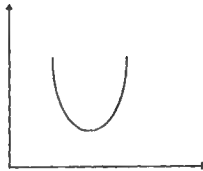


شكل (١ - ٢٨)
منحنى متعدد القمم

١-٨ أشكال المنحنيات:

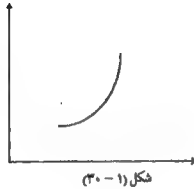
تتمثل أشكال المنحنيات بالأشكال والتسميات التالية:

1- الشكل النوني.



شكل (١ - ٢٩)

2- الشكل اللامي.



أمثلة إضافية:

مثال (1-23): في الجدول التكراري التالي توزيع 500 موظف حسب الأجر الشهري بالدينار، بناءً على بيانات العينة العشوائية المختارة من مجتمع العاملين في إحدى الشركات. كما هو مبين في الجدول (1-35)

الفئات	-0	-100	-250	500-1000
عدد العمال	200	150	125	25

جدول (1-35)

- المطلوب: (1) تسمية جدول تكراري.
- (2) إيجاد جدول التكرار المعدل.
- (3) رسم المضلع التكراري والمنحنى التكراري لجدول التكرار المعدل.
- (4) تسمية المنحنى الناتج من حيث التماثل.
- (5) حساب نسبة العمال الذين تزيد أجورهم عن 75 دينار
- (6) حساب نسبة العمال الذين تقل أجورهم عن 300 دينار
- (7) حساب نسبة العمال الذين تقع أجورهم بين 150 دينار، 300 دينار.

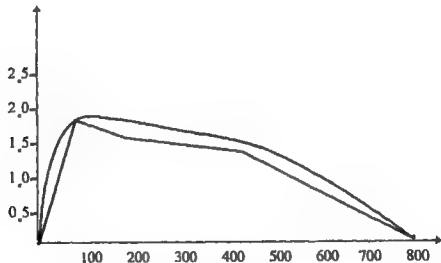
الحل: 1- نكون جدول الحل (1-36)

فئات الدخل	عدد العمال	التكرار المعدل لكل	مراكز الفئات سير	كثير سير	فئات أقل من	التكرار المعدل التجمعي
-0	200	2	50	100	100 >	2
-100	150	1	175	175	250 >	3
-250	125	0.5	375	187.5	500 >	3.50
1000-500	25	0.05	750	37.5	1000 >	3.55
	500	3.55		500		

جدول (1-36)

$$(2) \text{ التكرار المعدل} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول الفئة}}$$

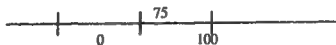
(3) بناءً على النتائج في 2 المطلوب رسم المصنع التكراري والمنحنى التكراري
كما في شكل (1-31)



شكل (1-31)

(4) غير متماثل وانما ملتو نحو اليمين.

5) لحساب نسبة العمال الذين تقل أجورهم عن 75 دينار: نجد عدد العمال ضمن الفترة المطلوبة كما هي موضح بالشكل:



شكل (1-32)

طول فئة التكرار:

$$200 \leftarrow 100$$

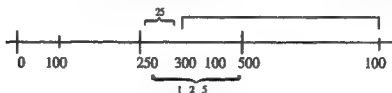
$$\frac{200}{\text{س}} = \frac{100}{75} \quad \text{وبالضرب التبادلي} \quad \leftarrow 75 \quad \text{س}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{200 \times 75}{100} = 150 \text{ موظف}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{150}{500} \quad \text{نسبة العمال الذين تقل أجورهم عن 75 دينار}$$

6) لحساب نسبة العمال الذين تزيد أجورهم عن (300) دينار.

نجد أولاً تكرار العمال ضمن هذه الفترة وذلك بالتمثيل على خط الأعداد والفترات.



شكل (1-33)

طول فئة التكرار:

$$125 \leftarrow 250$$

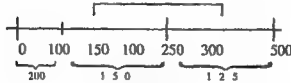
$$\frac{50 \times 125}{250} = \text{س} \quad \therefore \text{س} = 25 \text{ موظف}$$

تكرار الفئة المطلوبة = $100 + 25 = 125$

نسبة العمال الذين تزيد اجورهم عن 300 = $\frac{125}{500} = \frac{1}{4}$

(7) لحساب نسبة الذين تتراوح اجورهم بين 150، 300

نجد عدد العمال للفترة المطلوبة في شكل (1 - 34)



شكل (1-34)

طول فئة التكرار:

150 ← 150

50 ← 50
 \therefore س = $\frac{125 \times 50}{250} = 25$ موظف

تكرار الفئة المطلوبة = $100 + 25 = 125$

نسبة العمال = $\frac{125}{500} = \frac{1}{4}$

مثال (1-24): البيانات التالية تمثل اوزان 50 طالبا مينة كما يلي :

67	59	48	38	47	51	67	72	69	48
59	41	62	41	42	32	42	38	35	21
64	43	79	55	27	67	61	32	47	35
43	58	62	69	29	55	65	54	51	27
31	62	55	65	51	53	67	69	55	42

جدول (1 - 37)

المطلوب: (1) تكوين جدول تكراري

(2) تحديد مراكز الفئات

(3) التكرار النسبي والمجموع

- (4) تمثيل البيانات بواسطة المدرج التكراري
 (5) تمثيل البيانات بواسطة المنحنى التكراري
 (6) تمثيل البيانات بواسطة المضلع التكراري
 (7) عدد الطلاب الذين أوزانهم تقع بين 53-69.
 (8) عدد الطلاب الذين تزيد أوزانهم عن 40 كغم
 (9) عدد الطلاب الذين تقل أوزانهم عن 45 كغم

الحل: (1) لتكوين جدول التكرار

$$(1) \text{ نحدد المدى} = \text{أعلى قيمة} - \text{أدنى قيمة} = 79 - 1 + 21 - 1 + 58 - 1 = 59.$$

وليكن عدد الفئات = 6 حيث أن $5 \leq \text{عدد الفئات} \leq 10$

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات}} = \frac{59}{6} = 9.9 \approx 10$$

ثم نبدأ بتكوين الجدول (1-37):

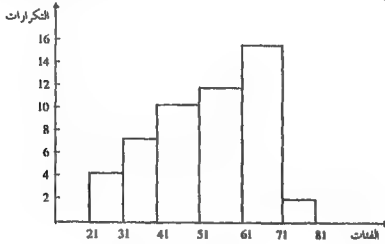
التردد النسبي	التكرار النسبي	مركز الفئة	التكرار	الفئات
0.08	$\frac{4}{50}$	26	4	-21
0.14	$\frac{7}{50}$	36	7	-31
0.22	$\frac{11}{50}$	46	11	-41
0.24	$\frac{12}{50}$	56	12	-51
0.28	$\frac{14}{50}$	66	14	-61
0.04	$\frac{2}{50}$	76	2	81 - 71
1.00	$\frac{50}{50}$		50	المجموع

جدول (1 - 37)

$$(2) \text{ مركز الفئة} = \frac{\text{الحدا الأدنى} + \text{الفئة الأولى} + \text{الحدا الأدنى للفئة الثانية}}{2} = \frac{26 + 31 + 21}{2}$$

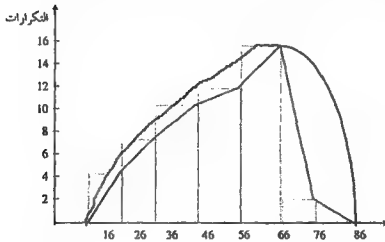
$$(3) \text{ التكرار النسبي للفترة} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{التكرار الكلي}}$$

(4) المدرج التكراري: هو عبارة عن مستطيلات متلاصقة قواعدهما هي الفئات وارتفاعاتها التكرارات المقابلة لكل فئة. وتمثل البيانات بالمدرج التكراري كما في شكل (1-35)



شكل (1 - 35)

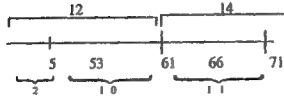
(5) المنحنى التكراري كما هو موضح في الشكل (1-36)



شكل (1 - 36)

(6) المضلع التكراري كما هو موضح في الشكل (1-36).

(7) نجد عدد الطلاب من الشكل (1-37):



شكل (1-37)

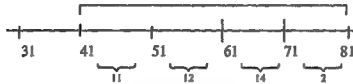
$$12 \leftarrow 10$$

$$2.5 \approx 2.4 = \frac{12 \times 2}{10} = \text{س} \therefore \text{س} \leftarrow 2$$

$$14 \leftarrow 10$$

$$11 \approx 11.2 = \frac{14 \times 8}{10} = \text{س} \therefore \text{س} \leftarrow 8$$

\therefore عدد الطلاب الذين تتراوح أوزانهم بين 53، 69 هو $21 = 11 + 10$ طالب
(8) نجد عدد الطلاب الفقرة المطلوبة كما في الشكل (1-38):



شكل (1-38)

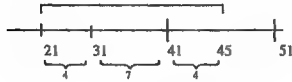
$$40 = 31 - 9, 10 \text{ طول الفقرة ويقابلها تكرار } 7$$

$$7 \leftarrow 10$$

$$6 \approx 6.3 = \frac{7 \times 9}{10} = \text{س} \therefore \text{س} \leftarrow 9$$

$$40 = 2 + 14 + 12 + 11 + 1 \text{ عدد الطلاب}$$

9) نجد عدد الطلاب للفترة المطلوبة كما في الشكل (1-39):



شكل (1-39)

$$4 \approx 4.4 = \frac{11 \times 4}{10} = 4.4 \text{ س} \quad \leftarrow \quad 11 \text{ س} \quad \leftarrow \quad 10$$

عدد الطلاب الذين تقل أوزانهم عن 45 = 4 + 7 + 4 = 15 طالب

تمارين عامة على الفصل الأول

س1- إذا كانت مراكز الفئات للبيانات المبوبة في جدول تكراري كالتالي:-

32، 35، 38، 41، 44

أوجد مايلي:

(1) طول الفئة.

(2) الفئات الفعلية للتوزيع.

(3) فئات التوزيع.

س2:- البيانات التالية تمثل عدد أمتار النسيج المصنوعة في 30 مصنعا' للنسيج خلال

اسبوع بآلاف الأمتار.

40	59	46	57	49	40
44	39	47	58	51	39
56	52	61	41	53	48
61	56	62	60	55	42
63	43	63	43	54	44

أوجد ما يلي:-

(1) مبتدئا بالعدد 39 شكل جدولا تكراريا ذات فئات منفصلة وطول كل فئة

5 وحدات.

(2) كم عدد فئات الجدول

(3) ارسم مدرجا تكراري.

(4) ارسم مضلعا تكراريا عن طريق مركز الفئات.

(5) ارسم مضلعا تكراريا متجمعا صاعدا.

(6) اوجد التكرار النسبي لهذا التوزيع.

(7) اوجد التكرار المتوي لهذا التوزيع.

- (8) كم مصنعا انتج اقل من 54 ألف متر.
 (9) كم مصنعا انتج اكثر من 48 ألف متر.
 (10) مبتدئا بالعدد 39 كون جدولا تكراريا اذا فئات بأطوال 4 وحدات شريطة أن تكون الفئات متصلة.
 س3:- البيانات التالية تمثل اوزان 40 رجلا لاقرب كغم.

65	59	72	63	72	69	62	60
62	66	73	75	65	75	63	61
77	68	74	61	66	74	67	59
74	69	62	63	72	77	68	7
68	70	60	64	73	71	64	76

اوجد ما يلي:

- (1) مبتدئا بالعدد 59 كون جدولا تكراريا ذا فئات بطول 3 وحدات شريطة أن تكون هذه الفئات هي فئات متصلة وكم عدد هذه الفئات.
 (2) ارسم مدرجا تكراريا.
 (3) ارسم مضلعا تكراريا عن طريق مراكز الفئات.
 (4) ارسم مضلعا تكراريا متجمعا صاعدا.
 (5) اوجد التكرار النسبي لهذه التوزيع.
 (6) اوجد التكرار المثنوي لهذا التوزيع.
 (7) كم عدد الذين تزيد اوزانهم عن 68 كغم أو تساوي 68 كغم.
 (8) كم عدد الذين تقل اوزانهم عن 68 كغم.
 (9) مبتدئا بالعدد 58 كون جدولا تكراريا لفئات متصلة ويطول 4 وحدات.
 س4:- كانت النتائج النهائية السنوية لاحدى المدارس الثانوية كما هي في الجدول التالي:-

النسبة المئوية	فئات الطلاب
65%	الناجحون
10%	الراسبون
5%	المفصولون
20%	حاملو المواد

والمطلوب تمثيل هذه البيانات بالقطاع الدائري

س5: البيانات التالية تمثل اعداد الخريجين لاحدى الكليات في احد الأعوام الدراسية

حسب التخصص والجنس

المجموع	الإناث	الذكور	التخصص
120	40	80	كمبيوتر
90	30	60	رياضيات
60	20	40	اجتماعيات
160	60	100	لغة عربية

والمطلوب ما يلي:-

1- قارن بين مختلف التخصصات بواسطة الأعمدة.

2- مثل كل تخصص على حدة بالقطاع الدائري ثم مثل جميع التخصصات في دائرة واحدة.

3- مثل التخصصات بالأعمدة دون التطرق إلى الجنس.

4- مثل هذه البيانات بالخط البياني.

س6:- البيانات التالية تمثل الدخل الكلي لاحدى المحافظات خلال الأعوام 1980/1984.

قارن بين هاتين الظاهرتين عن طريق تمثيلها بالخط البياني:-

جدول الدخل الكلي والاتفاق الكلي بآلاف الدينار

السنوات	الدخل الكلي	الاتفاق الكلي
1980	190	130
1981	160	80
1982	210	140
1983	230	150
1984	200	135

ص7:- عرف ما يلي:-

علم الإحصاء، علم الإحصاء الوصفي، علم الإحصاء التحليلي، المصادر التاريخية للمعلومات، المصادر الميدانية للمعلومات، الاستمارة الإحصائية، كشف البحث، صحيفة الاستبيان، طريقة المسح الشامل، العينة، العينة العمدية، العينة العشوائية، تبويب البيانات، التوزيع التكراري، الجدول التكراري، الفقة، التكرار النسبي، التكرار المهيوي، الجداول المقفلة، الجداول المفتوحة، الجدول المنتظم، الجدول غير المنتظم، الفئات المنفصلة، الفئات المتصلة، المدرج التكراري.

ص8:- فيما يلي الجدول التكراري التجميعي لتوزيع الاجر الاسبوعي (بالدينار) لعمال مصنع ما عددهم "144" عاملاً.

ال تكرار التجميعي	اقل من
28	4
58	10
68	15
84	23
119	30
144	40

المطلوب:

1- رسم المنحنى التجميعي الصاعد والمنحنى التجميعي الهابط.

2- ما هي إحداثيات نقطة تقاطع المنحنيين الصاعد والهابط.

3- بناءً على المعلومات الموجودة في الجدول السابق:

اختيار العينة العشوائية المناسبة بكسر المعاينة (12/1)

س9: من المعلوم أن توزيع الطلبة المتخصصين في كلية الإقتصاد والعلوم الإدارية في

الأعوام الدراسية 81/80 و 82/81 كما هو مبين في الجدول التالي:

التخصص / العام الدراسي	1981/1980	1982/1981
الاقتصاد والاحصاء	130	245
ادارة الاعمال	350	415
الادارة العامة	180	366
العلوم السياسية	60	122
المجموع	1000	1500

المطلوب:-

1- ما هو نوع (أو أنواع) التصنيف الذي أدى الى تكوين هذا الجدول .

2- تمثيل البيانات الموجودة في الجدول.

أ- بطريقة الأعمدة (المستطيلات) المجزئة.

ب- بطريقة الدوائر المقسمة الى قطاعات.

3- اختيار عينة عشوائية مناسبة بكسر المعاينة (0.02) من بين طلبة 81/80

س11:- فيما يلي الجدول التكراري للمتجمع الصاعد لعينة مؤلفة من (50) طالباً

ناجحاً موزعة حسب علاماتهم في مساق الاحصاء (101).

أقل من	أقل من 60	أقل من 70	أقل من 80	أقل من 90	أقل من 100
التكرار المتجمع	8	20	40	47	50

المطلوب: (1) تكوين الجدول التكراري الأصلي

(2) تكوين الجدول التكراري النسبي

(3) رسم المنحنى المتجمع الصاعد.

س12: يبلغ عدد الطلبة في كلية الآداب (1000) طالباً من بينهم 600 من الاناث.

المطلوب اختيار العينة العشوائية الممثلة المناسبة بكسر المعينة 0.020 وذلك من أجل تشكيل وفد طلابي، متبعا الخطوات بالترتيب مع ذكر هذه الخطوات.

س13:- فيما يلي جدول تكراري لتوزيع عينة مؤلفة من 60 طالبا حسب علاماتهم

فئات الطلاب	-40	-50	-60	-70	-80
عدد الطلبة	8	12	20	16	4

المطلوب:- 1. رسم المنحنى التجميعي الصاعد

2. حساب نسبة الطلبة الذين تقل علاماتهم عن 76.

3. حساب العلامة التي حصل على أعلى منها 10٪ من الطلبة.

س14:- فيما يلي جدول تكراري يبين توزيع 50 طالبا حسب معدلاتهم التراكمية.

فئات العلامات	-35	-60	-67	-76	-84
عدد الطلبة	2	21	18	8	1

المطلوب إيجاد:-

1- الجدول التكراري المعدل .

2- نسبة الطلبة الذين تتراوح علاماتهم بين (65و75)

3- إذا اختر ما نسبته 15٪ من الطلبة للدراسات العليا ما هي أدنى علامة

تؤهل الطالب للحصول على هذه الفرصة.

4- رسم المضلع التكراري، وبيان تماثله.

الفصل الثاني

مقاييس النزعة المركزية

مقدمة:

ان كلمة النزعة المركزية تعني الرغبة في التمرکز والتكثف نحو رقم معين وهذا هو محور دراستنا في هذه الوحدة وكل الذي نوده كيفية حساب هذه القيمة لتمثل باقي القيم تمثيلاً سليماً والتي تعتبر مقياساً لباقي القيم وقد وجد باحثوا الاحصاء العديد من هذه المقاييس أهمها:

(1) الوسط الحسابي (2) الوسيط (3) المتوال

هذا وستناول كل مقياس على حدى بنوع من التفصيل من حيث الخصائص وطرق ايجاده.

(1-2) الوسط الحسابي:

تعريف: الوسط الحسابي لمجموعة مشاهدات هو مجموع هذه المشاهدات مقسوماً على عددها ويمكن كتابة هذه العلاقة الرياضية:

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع المشاهدات}}{\text{عدد المشاهدات}} \quad (1 - 2)$$

2-1-1) كيفية إيجاد الوسط الحسابي :

أ- إذا كانت لدينا البيانات غير مبوبة. وهذه تكون بصورتين.

(1) البيانات غير مبوبة ومفردة (غير متكررة).

تعريف: إذا كان لدينا قيم المشاهدات $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ ، فإن الوسط

الحسابي لهذه المشاهدات \bar{s} هو

$$\bar{s} = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n}{n} \quad \dots (2-2)$$

أو باستخدام رمز المجموع فإننا نكتب المتوسط الحسابي على الصورة

$$\bar{s} = \frac{\sum_{r=1}^n s_r}{n} \quad \dots (2-3)$$

حيث $r=1, 2, \dots, n$.

مثال (2-1) : إذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية.

3، 5، 7، 11، 13، 21 والمطلوب إيجاد الوسط الحسابي لهذه البيانات.

الحل: باستخدام العلاقة أعلاه فإن:

$$10 = \frac{60}{6} = \frac{21+13+11+7+5+3}{6} = \bar{s}$$

مثال (2-2): إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من المشاهدات 84 وكان مجموع هذه المشاهدات 420 أوجد عدد هذه المشاهدات.

الحل: من العلاقة الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$

$$5 = \frac{420 \times 1}{84} = \frac{420}{n} \Rightarrow n = 84 \text{ مشاهدات}$$

(2) اذا كانت المشاهدات متكررة في جدول تكراري فاننا نجد الوسط الحسابي (الوسط الحسابي الموزون او المرجح)

تعريف: اذا كان لدينا قيم المشاهدات s_1, s_2, \dots, s_r وتكراراتها المقابلة على التوالي k_1, k_2, \dots, k_r ، كن فان الوسط الحسابي يكون

$$\bar{s} = \frac{s_1 k_1 + s_2 k_2 + \dots + s_n k_n}{k_1 + k_2 + \dots + k_n} \dots (2 - 4)$$

او باستخدام صيغة المجموع

$$\bar{s} = \frac{\sum_{i=1}^n s_i \times k_i}{\sum_{i=1}^n s_i} \dots (2 - 5)$$

مثال (2-3): في شعبة ادارة الاعمال اعطى مئة طالب امتحان احصاء من عشر علامات وكان توزيع الطلاب حسب العلامات التي حصلوا عليها موزعة بالجدول (2-1):

العلامة	10	9	8	7	6	5	4
عدد الطلاب	5	16	21	35	13	8	2

جدول (2 - 1)

المطلوب: إيجاد الوسط الحسابي لهذه المشاهدات.

الحل: نلجأ لحل مثل هذه المسائل اما بتكوين جدول الحل (2 - 2) وباستخدام العلاقة المعطاة:

التكرار كـ	العلامة مـ	مـ كـ
5	10	50
16	9	144
21	8	168
35	7	245
13	6	78
8	5	40
2	4	8
100		733

جدول (2-2)

$$\text{ثم نجد } \bar{x} = \frac{733}{100} = 7.33$$

او نجد الوسط الحسابي من العلاقة التالية مباشرة $\bar{x} = \frac{\sum m \times k}{\sum k}$ دون استخدام الجدول أعلاه على النحو التالي:

$$\bar{x} = \frac{2 \times 4 + 8 \times 5 + 13 \times 6 + 35 \times 7 + 21 \times 8 + 16 \times 9 + 5 \times 10}{2 + 8 + 13 + 35 + 21 + 16 + 5}$$

$$7.33 = \frac{733}{100} = \frac{8 + 40 + 78 + 245 + 168 + 144 + 50}{100} =$$

(ب) إيجاد الوسط الحسابي للبيانات المبوية:

هناك عدة طرق لإيجاد الوسط الحسابي وسوف نستعرض في كتابنا هذا اهم الطرق المستخدمة.

(1) طريقة استخدام التكرارات ومراكز الفئات او طريقة القانون العام: في هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

- نجد مراكز الفئات سر.

- نجد مجموع حاصل ضرب مركز كل فئة بالتكرار المقابل لها أي $\sum x \cdot ك$.

- نجد مجموع التكرارات أي $\sum ك$

- ونستخدم العلاقة التالية:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot ك_i}{\sum_{i=1}^n ك_i} \dots\dots\dots (2 - 6)$$

مثال (2-4): لوجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات المبوبة بالجدول (2-3) بالطريقة المباشرة.

الفئات	24-20	29-25	34-30	39-35	44-40	المجموع
التكرار	7	13	21	6	3	50

جدول (2 - 3)

الحل: نشكل الجدول (2 - 4) والذي يحتوي على جميع الحسابات المطلوبة لهذه الطريقة.

الفئات	التكرار ك	مراكز الفئات سر	سر × ك
24 - 20	7	22	154 = 22 × 7
29 - 25	13	27	351 = 27 × 13
34 - 30	21	32	672 = 32 × 21
39 - 35	6	37	222 = 37 × 6
44 - 40	3	42	126 = 42 × 3
المجموع	50		1525

جدول (2 - 4)

وتطبيق العلاقة (2-6).

$$\bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^n S_i \times K_i}{\sum_{i=1}^n K_i}$$

$$305 = \frac{1525}{50} = \bar{S}$$

فاننا نجد ان $\bar{S} = \frac{1525}{50}$

(2) إيجاد الوسط الحسابي باستخدام الوسط الفرضي:

لايجاد الوسط الحسابي بهذه الطريقة تتبع الخطوات التالية:

- نجد مراكز الفئات S_i .
- نأخذ أي مركز فئة كوسط فرضي وغالباً ما يكون مركز الفئة المقابلة للأكثر تكراراً ويرمز له بالرمز (أ).
- نجد انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي ونرمز لها بالرمز K_i .
- نجد مجموع حاصل الضرب أي $\sum_{i=1}^n S_i \times K_i$.
- نجد الوسط الحسابي من العلاقة.

$$\bar{S} = A + \frac{\sum_{i=1}^n S_i \times K_i}{\sum_{i=1}^n K_i} \dots \dots \dots (2 - 7)$$

مثال (5-2) : اذا كان لدينا البيانات التالية والمبوبة بالجدول (5-2):

الفئات	-30	-40	-50	-60	-70	المجموع
التكرار ك _ر	2	9	21	11	7	50

جدول (5-2)

المطلوب إيجاد الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي.

الحل: نكون الجدول (6-2) والمتضمن الحسابات الواردة في الخطوات السابقة:

الفئات	التكرار	مراكز الفئات	حـ صـ أ	حـ × كـ
-30	2	35	20- -55-35	40- -20- ×2
-40	9	45	10- -55-45	90- -10- ×9
-50	21	55	0- -55-55	0-0×21
-60	11	65	10-55-65	110=10×11
-70	7	75	20=55-75	140=20×7
المجموع	50			120

جدول (6-2)

وليكن الوسط الفرضي $A=55$ وباستخدام العلاقة أدناه فان:

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{i=1}^n f_i \times d_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

$$\text{نجد ان } \bar{X} = 55 + \frac{120}{50} = 57.4$$

(3) إيجاد الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

لايجاد الوسط الحسابي بهذه الطريقة تتبع الخطوات التالية.

- نجد مراكز الفئات مرة
- نأخذ وسط فرضي وليكن أ والمقابل للاكثر تكراراً من مراكز الفئات
- نجد انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي أي حـ

$$- \text{نجد الانحرافات المختصرة ولتكن } \bar{X} = \frac{\sum X}{L} = \frac{\sum}{\text{طول الفئة}}$$

- نجد حاصل ضرب $\bar{X} \times K$,
- نجد مجموع حاصل ضرب $\bar{X} \times K$,
- نجد للمتوسط الحسابي من العلاقة.

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{i=1}^n \bar{X} \times K}{\sum_{i=1}^n K} \times L \quad \text{..... (8-2)}$$

مثال(2-6): البيانات التالية تمثل اوزان 50 طالباً موزعين بالجدول (2-7).

الفئات	54-50	59-55	64-60	69-65	74-70	المجموع
الطلاب	7	13	25	3	2	50

الجدول (2-7)

المطلوب: إيجاد الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

الحل: نكون الجدول (2-8) والمتضمن جميع الحسابات الواردة في الخطوات السابقة.

الصفات	التكرار ك	مراكز الفئات سر	الانحرافات عن الوسط الفرضي ح	الانحرافات المختصرة ح	ح × ك
54-50	7	52	10 - 62 -52	$2 - = \frac{10-}{5}$	14--2-×7
59 -55	13	57	5- - 62 -57	$1 - = \frac{5-}{5}$	13--1-×13
64-60	25	62	0 - 62 -62	$0 = \frac{0}{5}$	0-0×25
69-65	3	67	5-62-67	$1 = \frac{5}{5}$	3-1×3
74-70	2	72	10-62 -72	$2 = \frac{10}{5}$	4-2×2
المجموع	50				20-

جدول (2 - 8)

وليكن الوسط الفرضي أ = 62

$$\text{وبتطبيق العلاقة } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{ح} \times \text{ك}}{\sum_{i=1}^n \text{ك}} + \text{أ}$$

$$\text{نجد ان } \bar{x} = 62 - 5 \times \frac{20}{50} = 62 - 2 = 60$$

مثال (2-7): البيانات التالية تمثل الأجر الأسبوعي لمائة عامل مبنية بالجدول (2-9):

الفئات	-30	-35	-40	-45	-50	المجموع
التكرار	7	17	36	29	11	100

جدول (2 - 9)

المطلوب إيجاد:

أ) الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة.

ب) الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات عن الوسط الفرضي.

جـ) الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

الحل: نكون الجدول (2-10) والمتضمن جميع الحسابات المطلوبة في الخطوات السابقة.

الفئات	التكرار	مراكز الفئات	مركز	حـ = مركز - مركز	ح × كـ	حـ = مركز - مركز	ح × كـ	مركز	حـ = مركز - مركز	ح × كـ
-30	7	32.5	227.5	10	70	10	70	10	70	70
-35	17	37.5	637.5	5	85	5	85	5	85	85
-40	36	42.5	1530	0	0	0	0	0	0	0
-45	29	47.5	1377.5	5	145	5	145	5	145	145
-50	11	52.5	577.5	10	110	10	110	10	110	110
المجموع	100		4350		100		100		100	100

جدول (2 - 10)

ليكن الوسط الفرضي $\bar{A} = 42.5$

$$\bar{A} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \times \text{كر}}{\sum_{i=1}^n \text{كر}} = \bar{A}$$

الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة

$$\bar{A} = \frac{4350}{100} = 43.50$$

ب) الوسط الحسابي باستخدام الانحرافات عن الوسط الفرضي:

$$\bar{A} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \times \text{كر}}{\sum_{i=1}^n \text{كر}} + \bar{A}$$

من العلاقة

$$43.5 = 1 + 42.5 = \frac{100}{100} + 42.5 = \bar{A}$$

ج) إيجاد الوسط الحسابي باستخدام الانحرافات المختصرة عن الوسط الفرضي أ .

$$\bar{A} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \times \text{كر}}{\sum_{i=1}^n \text{كر}} + \bar{A}$$

من العلاقة:

$$43.5 = 1 + 42.5 = 5 \times \frac{20}{100} + 42.5 = \bar{A}$$

نلاحظ ان الوسط الحسابي في الطرق الثلاث متساوية.

2-1-2) الوسط الحسابي المرجح؛

لعل هذا المفهوم يفيد كثيراً في حالات دمج مجموعات ذات أحجام عينات

مختلفة ولا بد من التوقف عند هذا المفهوم لنتناول هذا التعريف.

تعريف: إذا كان لدينا مجموعة من العينات أحجامها n_1, n_2, \dots, n_r ونرسمنا بعملية

دمج هذه العينات المختلفة وأردنا إيجاد الوسط الحسابي للمجموعات بعد الدمج
فاننا نجد الوسط الحسابي للعينات بعد الدمج (الوسط الحسابي المرجح) من العلاقة
التالية:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 \times n_1 + \bar{x}_2 \times n_2 + \dots + \bar{x}_r \times n_r}{n_1 + n_2 + \dots + n_r} \dots\dots\dots (9 - 2)$$

حيث أن $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r$ هي الأوساط الحسابية لكل عينة.

مثال: اذا كان لدينا ثلاثة عينات احجامها على التوالي $n_1 = 15$, $n_2 = 20$, $n_3 = 25$
وكانت اوساطها الحسابية $\bar{x}_1 = 45$, $\bar{x}_2 = 75$, $\bar{x}_3 = 60$ ودبجت العينات
الثلاث معاً أوجد الوسط الحسابي المرجح للعينات بعد الدمج.

$$\begin{aligned} \text{الحل: } \bar{x} &= \frac{\bar{x}_1 \times n_1 + \bar{x}_2 \times n_2 + \bar{x}_3 \times n_3}{n_1 + n_2 + n_3} \\ &= \frac{60 \times 25 + 75 \times 20 + 45 \times 15}{25 + 20 + 15} \\ &= 61.25 = \frac{3675}{60} = \frac{1500 + 1500 + 675}{60} \end{aligned}$$

3-1-2 خصائص الوسط الحسابي:

1) مجموع انحرافات للملاحظات عن الوسط الحسابي = صفر.

مثال (2-8): اذا كان لدينا قيم المشاهدات 17، 21، 15، 27، 20 أثبت أن مجموع
انحرافات للملاحظات عن الوسط الحسابي يساوي صفراً.

$$\text{الحل: } \text{نجد الوسط الحسابي } \bar{x} = \frac{20 + 27 + 15 + 2 + 17}{5} = \frac{100}{5} = 20$$

نجد الانحرافات للملاحظات عن الوسط الحسابي:

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_1 - \bar{x} = 20 - 17 = 3$$

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_2 - \bar{x} = 20 - 21 = -1$$

$$\bar{x}_3 = \bar{x}_3 - \bar{x} = 20 - 15 = 5$$

$$\bar{x}_4 = \bar{x}_4 - \bar{x} = 20 - 27 = -7$$

$$\bar{x}_5 = \bar{x}_5 - \bar{x} = 20 - 20 = 0$$

$$\bar{x} = -3 + 5 - 1 + 7 = 7$$

وهذا ما يؤكد صحة الخاصية بأن مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي = صفر.

(2) الوسط الحسابي يتأثر بالقيم المتطرفة.

مثال (2-9): أوجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات التالية.

$$2500, 40, 50, 13, 37$$

$$\bar{x} = \frac{2500 + 40 + 50 + 13 + 37}{5} = \frac{2640}{5} = 528$$

وهذا العدد بعيد كل البعد عن باقي قيم المشاهدات وهذا من جراء القيمة المتطرفة 2500 لكن لو استبعدنا القيمة المتطرفة فنلاحظ ان الوسط الحسابي سيصبح واقعياً.

مثال (2-10): أوجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات اعلاه بدون القيمة المتطرفة.

$$\bar{x} = \frac{40 + 50 + 13 + 37}{4} = \frac{140}{4} = 35$$

وهذه القيمة متقاربة مع قيم المشاهدات الاخرى.

3) يأخذ كل قيم المشاهدات ذات العلاقة في الاعتبار وهذا واضح من العلاقة الرياضية التالية:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \bar{x}$$

مثال (2-11): أوجد المتوسط الحسابي لعلامات خمسة طلاب في امتحان الاحصاء

كانت كما يلي 8،0،6،9،7

$$\text{الحل: نجد } \bar{x} = \frac{8+0+6+9+7}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

4) المتوسط الحسابي هو متوسط لقيم المشاهدات في المجموعة وليس متوسط لترتيب القيم كما هو الحال في الوسيط.

5) مجموع مربعات الانحرافات القيم عن وسطها أقل من مجموع مربعات انحرافات القيم عن أي قيمة أخرى.

مثال (2-12): أ) أوجد مربع الانحرافات القيم عن الوسط الحسابي لقيم المشاهدات 10، 13، 9، 5، 3 ثم أوجد مربع الانحرافات عن القيمة 13.

وقارن بين النتيجة الأولى والثانية لتثبت صحة الخاصية أعلاه.

$$\text{الحل: نجد: } \bar{x} = \frac{10+13+9+5+3}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

نجد:

$$x_1 - \bar{x} = 1 - 8 = -7 \quad ، \quad x_2 - \bar{x} = 3 - 8 = -5 \quad ، \quad x_3 - \bar{x} = 9 - 8 = 1 \quad ، \quad x_4 - \bar{x} = 5 - 8 = -3 \quad ، \quad x_5 - \bar{x} = 10 - 8 = 2$$

$$x_1 - \bar{x} = 1 - 13 = -12 \quad ، \quad x_2 - \bar{x} = 3 - 13 = -10 \quad ، \quad x_3 - \bar{x} = 9 - 13 = -4 \quad ، \quad x_4 - \bar{x} = 5 - 13 = -8 \quad ، \quad x_5 - \bar{x} = 10 - 13 = -3$$

$$x_1 - \bar{x} = 1 - 13 = -12 \quad ، \quad x_2 - \bar{x} = 3 - 13 = -10 \quad ، \quad x_3 - \bar{x} = 9 - 13 = -4 \quad ، \quad x_4 - \bar{x} = 5 - 13 = -8 \quad ، \quad x_5 - \bar{x} = 10 - 13 = -3$$

$$ح_4 = 5 - 8 - 13 - 25 \quad ، \quad ح_4^2 = 25$$

$$ح_5 = 2 - 8 - 10 - 4 \quad ، \quad ح_5^2 = 4$$

$$\sum_{r=1}^2 ح_r^2 = 64$$

نجد الانحرافات لقيم المشاهدات عن الملاحظة 13

$$ح_1 = 1 - 10 - 13 - 3 - 13 - 10 \quad ، \quad ح_1^2 = 100$$

$$ح_2 = 2 - 8 - 13 - 5 - 13 - 8 \quad ، \quad ح_2^2 = 25$$

$$ح_3 = 3 - 4 - 13 - 9 - 13 - 4 \quad ، \quad ح_3^2 = 16$$

$$ح_4 = 4 - 0 - 13 - 13 - 13 - 0 \quad ، \quad ح_4^2 = 0$$

$$ح_5 = 5 - 3 - 13 - 10 - 13 - 3 \quad ، \quad ح_5^2 = 9$$

$$\sum_{r=1}^5 ح_r^2 = 150$$

نلاحظ ان مجموع الانحرافات لقيم المشاهدات عن وسطها الحسابي اقل من

مجموع انحرافات القيم عن اية قيمة اخرى لأن $150 > 64$.

(5) عند اضافة عدد ثابت الى جميع قيم المشاهدات فاننا نضيف هذا العدد الى الوسط الحسابي.

(6) عند ضرب عدد ثابت في جميع قيم المشاهدات فاننا نضرب الوسط الحسابي في نفس القيمة.

2-2 الوسيط:

نبدأ التحدث عن مفهوم الوسيط باعطاء التعريف التالي.

تعريف: الوسيط هو عبارة عن القيمة الاوسطية لمجموعة من القيم رُتبت تصاعدياً أو تنازلياً في حالة اذا كان عدد القيم فردية ومتوسط القيمتين الأوسطيتين. اذا كان عدد القيم زوجياً.



هذا التمثيل اذا كان عدد القيم مفردة والترتيب تصاعدياً.



وهذا التمثيل إذا كان عدد القيم زوجياً.

كيفية إيجاد الوسيط:

(أ) حساب الوسيط من البيانات غير المبوبة.

يوجد حالتان لحساب الوسيط من هذه البيانات.

1- اذا كان عدد القيم غير المبوبة فردياً.

اذا كان لدينا قيم المشاهدات $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ وكانت n فردية والحساب الوسيط تتبع الخطوات التالية.

- تُرتب البيانات ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً ولكن ستأول في كتابتنا الترتيب التصاعدي.

- نجد ترتيب الوسيط من العلاقة:

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{1+n}{2} \dots\dots\dots (10-2)$$

حيث ن عدد القيم.

نجد قيمة الوسيط وهي القيمة للناظرة لترتيب الوسيط.

مثال (2-13) : اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية 3، 21، 5، 9، 11، 7، 14. اوجد الوسيط لهذه القيم.

الحل: تتبع الخطوات اعلاه

(1) نرتب قيم المشاهدات ترتيباً تصاعدياً كما في الجدول (2 - 11)

القيمة	3	5	7	9	11	14	21
الترتيب	1	2	3	4	5	6	7

جدول (2 - 11)

ثم نضع ترتيب كل قيمة

$$(2) \text{ نجد ترتيب الوسيط حيث ترتيب الوسيط} = \frac{1+7}{2} = 4 \text{ أي الترتيب الرابع}$$

(3) نجد قيمة الوسيط (و) وهي القيمة التي تناظر الترتيب الرابع والمشار لها بالسهم
فيكون قيمة الوسيط و = 9

2- اذا كان عدد القيم غير المئوية زوجياً.

لايجاد الوسيط لهذه القيم تتبع الخطوات التالية.

(1) نرتب قيم المشاهدات ترتيباً تصاعدياً.

(2) نجد ترتيب الوسيطون من العلاقة التالية:

(11-2) $\frac{n}{2}$ ترتيب و₁ (الوسيط الأول) =

(12-2) $\frac{2+n}{2}$ ترتيب و₂ الوسيط الثاني = $1 + \frac{n}{2}$ أو

(3) نجد قيم و₁، و₂ للمناظرة لترتيبهما.

(4) نجد و (الوسيط) من العلاقة:

(13-2) $w = \frac{2+1}{2}$

مثال (2-14): أوجد الوسيط لقيم المشاهدات 20، 18، 11، 29، 15، 25، 7، 3

الحل: تتبع الخطوات التالية.

(1) نرتب قيم المشاهدات ترتيباً تصاعدياً. ونضع مقابل كل قيمة ترتيبها.

29	25	20	18	15	11	7	3
8	7	6	5	4	3	2	1

(2) نجد ترتيب الوسيطين و₁، و₂ من العلاقتين السابق ذكرهما، فيكون ترتيب

و₁ = $\frac{8}{2} = 4$ أي الرابع، وترتيب و₂ = $1 + 4 = 5$ أي الخامس.

(3) نجد القيم المناظرة لترتيبهما كما هو مشار بالأسهم فيكون قيمة و₁=15، وقيمة و₂=18.

(4) نجد الوسيط و للقيم من العلاقة:

و = $\frac{2+1}{2} = \frac{18+15}{2} = \frac{33}{2} = 16.5$

ب) حساب الوسيط للبيانات المبوبة.

قبل الخوض في إيجاد الوسيط للبيانات المبوبة وذكر الخطوات لها لابد من التعرف لمفهوم التكرار المتجمع الصاعد والمهابط.

تعريف: التكرار المتجمع الصاعد هو اضافة تكرار الفئة (أو الفئات) السابقة لتكرار الفئة اللاحقة ويبدأ التكرار المتجمع الصاعد بالصفر وينتهي بمجموع التكرارات الكلي ولعمل جدول متجمع صاعد تتبع الخطوات التالية

- 1) نضيف فئة سابقة في الجدول المعطى تكرارها صفراً.
- 2) نجد الحدود الفعلية لكل فئة.
- 3) نجد عمود الحدود الفعلية العليا ونسبها برمز $>$ للدلالة على أصغر من.
- 4) نجد عمود التكرارات المتجمعة بحيث يكون تكرار الفئة السّي هي اقل من الحد الأدنى المعطى = صفر

تكرار الفئة المتجمعة الاولى = تكرار الفئة الاولى المعطاة.

تكرار الفئة المتجمعة الثانية = تكرار الفئة الاولى المعطاة + تكرار الفئة الثانية المعطاة.

تكرار الفئة المتجمعة الثالثة = تكرار الفئة الاولى المعطاة + تكرار الفئة الثانية المعطاة + الثالثة

⋮
⋮
⋮

تكرار الفئة المتجمعة الاخيرة = مجموع التكرارات جميعها.

والآن نتقل الى كيفية إيجاد الوسيط من البيانات المبوبة.

ايجاد الوسيط من البيانات المبوبة:

لايجاد الوسيط للبيانات المبوبة تتبع الخطوات التالية:

(1) نضيف للجدول المعطى فئة سابقة تكرارها صفراً.

(2) نجد عمود للفئات الفعلية العلوية.

(3) نجد عمود تكرار المتجمع الصاعد.

(4) نجد ترتيب الوسيط من العلاقة.

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجموع التكرارات}}{2} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i}{2} \quad \text{..... (2-14)}$$

(5) نحدد موقع ترتيب الوسيط بين التكرارات المتجمعة الصاعدة ونشير له بسهم.

(6) نجد الفئة الوسيطة بحديها الفعلين الأدنى والأعلى وهي الفئة التي تقع تحت

السهم الذي يشير لترتيب الوسيط.

(7) نحدد الحد الأدنى للفئة الوسيطة.

(8) نحدد تكرارا للمتجمع السابق واللاحق لترتيب الوسيط.

(9) نحدد طول الفئة الوسيطة.

(10) نجد الوسيط من العلاقة:

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطة} + \frac{\text{تكرار المتجمع السابق لترتيب الوسيط} - \text{تكرار المتجمع السابق لترتيب الوسيط}}{\text{طول الفئة}} \quad \text{..... (2-15)}$$

مثال (2-15): البيانات التالية تمثل الاجور الشهرية لمائة عامل موزعين بالجدول (2-12).

فئات الاجور	69-60	79-70	89-80	99-90	109-100	المجموع
عدد العمال	6	12	47	25	10	100

جدول (2 - 12)

المطلوب: ايجاد مايلي.

(أ) اوجد عدد العمال الذين رواتبهم اقل من 60 دينار.

(ب) اوجد عدد العمال الذين رواتبهم بين 60 واقل من 100 دينار.

(ج) اوجد عدد العمال الذين رواتبهم 80 دينار فأكثر.

(د) اوجد الوسيط لهذه الاجور .

(هـ) اوجد الوسيط بطريقة الرسم.

الحل: (أ) عدد العمال الذين تقل رواتبهم عن 60 = صفر.

(ب) عدد العمال الذين رواتبهم بين 60 وأقل من 100 دينار.

$$= 6 + 12 + 47 + 25 = 90 \text{ عاملاً.}$$

(ج) عدد العمال الذين رواتبهم 80 دينار فأكثر = $10 + 25 + 47 = 82$ عاملاً.

(د) لايجاد الوسيط نتبع الخطوات السابقة ونشكل الجدول (2-13) الذي يشمل جزءاً من الخطوات.

الفئات	تكرار	الفئات الفعلية	الفئات الفعلية العليا	التكرار المتجمع الصاعد
59-60	6	59.5-69.5	59.5 >	6
69-70	12	69.5-79.5	69.5 >	18
79-80	47	79.5-89.5	79.5 >	65
89-90	25	89.5-99.5	89.5 >	90
99-100	10	99.5-109.5	99.5 >	100
	100			

التكرار السابق لترتيب الوسيط
ترتيب الوسيط
التكرار اللاحق لترتيب الوسيط

جدول (2-13)

ثم تتبع الخطوات الأربع التالية:

$$(1) \quad \text{نجد ترتيب الوسيط} = \frac{100}{2} = 50$$

$$(2) \quad \text{نجد الفئة الوسيطة (79.5 - 89.5)}$$

$$(3) \quad \text{نجد الحد الأدنى للفئة الوسيطة} = 79.5.$$

$$(4) \quad \text{نطبق العلاقة:}$$

$$\text{الوسيط} = 79.5 + \frac{18-50}{18-65} \times 10$$

$$= 79.5 + \frac{10 \times 32}{47} = \frac{320}{47} + 79.5$$

$$= 79.5 + 6.81 = 86.31$$

ونلاحظ ان قيمة الوسيط وقعت ضمن الفئة الوسيطة ولذا سميت الفئة الوسيطة.

هـ- لايجاد الوسيط بطريقة الرسم تتبع الخطوات التالية:

(1) نرسم محورين متعامدين المحور الأفقي يمثل الحدود العليا الفعلية والمحور الرأسي

يمثل عليه التكرار المتجمع الصاعد.

$$(2) \text{ نجد ترتيب الوسيط} = \frac{100}{2} = 50.$$

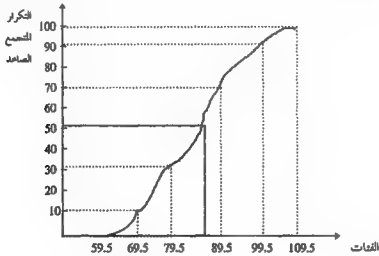
(3) نعين النقاط التي احداثها الأول يمثل الفئات الفعلية والاحداثي الثاني يمثل التكرار المتجمع المقابل لها.

(4) نرسم المنحنى المار بهذه النقاط ويسمى المنحنى التكراري المتجمع الصاعد.

(5) نعين ترتيب الوسيط على المحور الرأسي ونقيم عمود من هذه النقطة على المحور الرأسي وموازي للمحور الأفقي يتقاطع مع المنحنى في نقطة.

(6) ننزل من هذه النقطة عمود على المحور الأفقي يتقاطع معه في نقطة تدل على الوسيط.

والآن نقوم برسم المنحنى لتحديد قيمة الوسيط من الرسم كما في شكل (1-2).



شكل (1-2).

مثال (2-16): البيانات التالية تمثل اجور 100 عامل مبنية بالجدول (2 - 14).

130-120	-110	-100	-90	-80	فئات الأجور
10	19	41	22	8	التكرار

جدول (2 - 14)

والمطلوب :

(1) إيجاد الوسيط بالطريقة الحسابية.

(2) إيجاد الوسيط بالطريقة البيانية.

الحل: نكون جدول الحل (2 - 15)

فئات الأجناس	التكرار	فئات أقل > 80	التكرار التجمعي
80 -	8	90 >	8
-90	22	100 >	30
-100	41	110 >	71
-110	19	120 >	90
130 - 120	10	130 >	100
	100		

جدول (2 - 15)

$$\text{الحل: (1) نجد ترتيب الوسيط} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{كر}}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

- نجد الفئة الوسيطة = 100 - وحدها الأدنى = 100

$$\text{- قيمة الوسيط} = 100 + \frac{10}{1} \times \frac{30 - 50}{30 - 71}$$

$$= 100 + \frac{10 \times 20}{1 \times 41} = 104.9 = 4.9 + 100 = \frac{200}{41}$$

(2) إيجاد الوسيط بالطريقة البيانية

- نرسم للمنحنى المتجمع الصاعد

- نجد ترتيب الوسيط

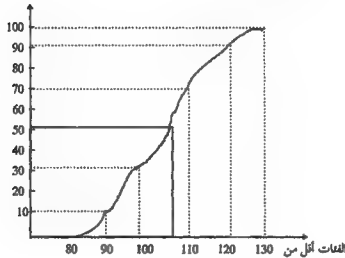
- نقيم عمود من نقطة ترتيب الوسيط ليقطع المنحنى في نقطة مثل ن ثم من

النقطة ن ننزل عمود يقطع محور الفئات في نقطة مثل م فتكون القيمة المقابلة للنقطة م

$$\text{هي قيمة الوسيط} \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \quad \text{ترتيب الوسيط:} \quad 50 = \frac{100}{2} = \frac{\sum_{i=1}^n 1}{2}$$

قيمة الوسيط = 104.9

كما هو مبين في شكل (2-2).



شكل (2-2)

خصائص الوسيط

(1) الوسيط لا يتأثر بالقيم المتطرفة كما هو الحال في الوسط الحسابي

مثال (2-17): اوجد الوسيط لقيم المشاهدات:

47، 22، 31، 2555، 3، 21، 7

الحل: نرتب القيم ترتيباً تصاعدياً.

- 3 7 21 22 31 47 2555

- نجد ترتيب الوسيط $= \frac{1+7}{2} = 4$ ∴ القيمة الرابعة هي الوسيط

- نأخذ القيمة المناظرة لترتيب الوسيط فنجد أن $= 22$ نلاحظ أن القيمة المتطرفة 2555 لا تؤثر على قيمة الوسيط.

(2) الوسيط يتأثر بعدد القيم للملاحظات .

مثال (2-18): أوجد الوسيط لقيم المشاهدات التالية.

7،11،5،33،19،4،8

الحل: نرتب قيم المشاهدات تصاعدياً

4 5 7 8 11 19 33

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)

- نجد ترتيب الوسيط $= \frac{1+7}{2} = 4$ أي الرابع.

يكون الوسيط مساو للقيمة المناظرة للترتيب الرابع أي أن $= 8$.

ولو حذفنا المشاهدين 5،4 مثلاً ثم نعيد ترتيب البيانات

7 8 11 19 33

(1) (2) (3) (4) (5)

نجد أن الوسيط $= 11$ نلاحظ أن الوسيط تغير ولم يبق ثابتاً.

(3) يأخذ بعين الاعتبار موقع القيم وليس متوسطها.

(4) يمكن إيجاده من الجداول المفتوحة.

5) مجموع الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات عن وسيطها اقل من مجموع الانحرافات المطلقة للقيم عن اية قيمة أخرى في حالة البيانات غير المبوبة.

مثال (2-19): اوجد الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات 3، 11، 5، 9، 14 عن وسيط هذه القيم ثم اوجد الانحرافات المطلقة عن القيمة 5.

الحل: نرتب القيم ترتيباً تصاعدياً

3	5	9	11	14
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

الوسيط 9

الانحرافات المطلقة عن الوسيط.

$$|ح_1| = |9-3| = 6$$

$$|ح_2| = |9-5| = 4$$

$$|ح_3| = |9-9| = 0$$

$$|ح_4| = |11-9| = 2$$

$$|ح_5| = |14-9| = 5$$

$$\text{المجموع} = 17$$

الانحرافات المطلقة عن القيمة 5

$$|ح_1| = |5-3| = 2$$

$$|ح_2| = |5-5| = 0$$

$$|ح_3| = |5-9| = 4$$

$$ح_4 = |5-11| = 6$$

$$ح_5 = |5-14| = 9$$

$$\text{المجموع} = 21$$

نلاحظ ان مجموع الانحرافات عن الوسيط هي اقل من مجموع الانحرافات عن اية قيمة اخرى.

2-3: المنوال:

تعريف: المنوال هو القيمة الأكثر تكراراً أو شيوعاً بين قيم المشاهدات.

طرق ايجاد المنوال:

أ- ايجاد المنوال للبيانات غير المبوبة.

(1) اذا لم يتكرر اي من القيم فلا يوجد منوالاً

مثال (2-20): لدينا قيم المشاهدات 7، 9، 11، 12، 15 أوجد منوال هذه القيم .

الحل: لا يوجد منوال لهذه القيم حيث ان اي من القيم لم تتكرر.

(2) اذا تكرر أحدها فيكون هناك منوالاً واحداً.

مثال (2-21): أوجد المنوال لقيم المشاهدات التالية 7، 11، 5، 7، 11، 7، 9

الحل: القيمة الأكثر تكراراً هي القيمة 7.

اما اذا كان لقيمتين نفس العدد من التكرار فيكون للقيم منوالان وهكذا يزداد المنوالات بزيادة العدد المتساوية التكرار على ان يبقى ولو على الاقل قيمة واحدة غير متكررة من بين القيم.

مثال (2-22): أوجد المنوال او المنوال لقيم المشاهدات التالية

$$11، 4، 9، 17، 9، 4$$

الحل: يوجد متوالان هما 4،9 لان هما نفس التكرار

ب) إيجاد المتوال للقيم المئوية

لايجاد المتوال هناك طريقتان

(1) الطريقة الجبرية

(2) الطريقة الهندسية.

(1) نبدأ بالطريقة الجبرية وهذه تقسم الى ثلاثة طرق منها:

(1) طريقة الفروق لبرسون.

لايجاد المتوال لهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية :

- نجد الفئة المتوالية وهي الفئة التي تقابل الاكثر تكراراً من بين الفئات.
- نجد الفرق بين تكرار الفئة المتوالية والفئة السابقة لها وليكن f_1
- نجد الفرق بين تكرار الفئة المتوالية والفئة اللاحقة لها وليكن f_2
- نجد المتوال من العلاقة التالية.

$$\text{المتوال} = \text{الحذ الأدنى للفئة المتوالية} + \frac{f_1}{f_1 + f_2} \times \text{ط (طول الفئة المتوالية)} \dots\dots (2-16)$$

مثال (2-23): البيانات التالية تمثل الدخل الشهري لمائة أسره موزعة كما في الجدول

(2-16).

فئات الدخل	99-0	109-100	119-110	129-120	139-130	المجموع
عدد الأسر	15	25	37	13	10	100

جدول (2-16)

والمطلوب إيجاد المتوال بطريقة الفروق (برسون)

الحل: يمكن تكوين الجدول (2 - 17) والمحتوى على الفئات الفعلية.

فئات الدخل	تكرار الفئة
99.5-89.5	15
109.5-99.5	25
119.5-109.5	37
129.5-119.5	13
139.5-129.5	10
المجموع	100

الفئة المتوسطة التي تقابل الأكثر تكراراً

جدول (2 - 17)

- نجد الفئة المتوسطة وهي 109.5-119.5

- نجد الحد الأدنى للفئة المتوسطة = 109.5

- نجد $f_1 = 37 - 25 = 12$

- نجد $f_2 = 37 - 13 = 24$

- نجد المتوسط من العلاقة السابقة.

$$\text{المتوسط} = \frac{12}{24+12} \times 10 = \frac{120}{36} =$$

$$= 109.5 + 3.33 = 112.83$$

(2) طريقة الرفع

لإيجاد المتوسط بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية.

- نحدد الفئة المتوسطة وهي التي تقابل الأكثر تكراراً.

- نجد الحد الأدنى للفئة المتوسطة.

- نجد k : التكرار السابق لتكرار الفئة المتوسطة.

- نجد ك₂: التكرار اللاحق لتكرار الفئة المنوالية.

نطبق العلاقة التالية.

$$\text{المنوال} = \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \frac{\frac{\text{ك}_1}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2} \times \text{طول الفئة}}{\dots\dots\dots (2-17)}$$

مثال (2-24) : أوجد المنوال للبيانات المبوبة بالجدول (2-18).

الفئات	-20	-25	-30	-35	-40	المجموع
التكرار	3	12	31	10	4	60

جدول (2 - 18)

أ) بطريقة الفروق. ب) بطريقة الرافعة.

الحل: نكون الجدول التالي بشكل رأسي (2 - 19).

الفئات	التكرار
-20	3
-25	12
-30	31
-35	10
-40	4
المجموع	60

جدول (2 - 19)

أ- بطريقة الفروق : نتبع ما يلي :

- نجد الفئة المنوالية = 30 وهي الفئة التي تقابل الأكثر تكراراً.

- نجد الحد الأدنى للفئة المنوالية=30

- نجد $F_1 = 31 - 12 = 19$

- نجد $F_2 = 31 - 10 = 21$

- نجد المنوال من العلاقة.

$$\begin{aligned} \text{المنوال} &= 30 + \frac{9}{21+19} \times 5 \\ &= 30 + \frac{19}{40} \times 5 = 30 + \frac{95}{40} \\ &= 32.375 - 2.375 + 30 = \end{aligned}$$

ب- المنوال بطريقة الرافعة

- نجد الفئة المنوالية = 30 -

- نجد الحد الأدنى للفئة المنوالية = 30

- نجد $K_1 = 12$

- نجد $K_2 = 10$

- نطبق العلاقة التالية.

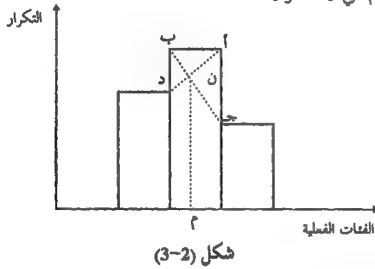
$$\begin{aligned} \text{المنوال} &= \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \frac{K_2}{K_1 + K_2} \times L \\ \text{المنوال} &= 30 + \frac{10}{12+10} \times 5 = 30 + \frac{50}{22} = 30 + 2.27 = 32.27 \end{aligned}$$

2 (الطريقة الهندسية:

وهنا نتبع الخطوات التالية.

- نرسم محورين متعامدين المحور الافقي يمثل الفئات الفعلية أو الفئات المفتوحة والمحور الرأسي يمثل التكرارات.
- نرسم المستطيل الذي قاعدته الفئة المنوالية وارتفاعه الاكثر تكراراً
- نرسم مستطيل يلاصق المستطيل الاول ويسبقه بحيث ان قاعدته الفئة السابقة للفئة المنوالية وارتفاعه يقابل تكرار الفئة السابقة للفئة المنوالية.

- نرسم مستطيل ملاصق وقاعدته الفئة اللاحقة للفئة المنوالية وارتفاعه تكرار الفئة اللاحقة.
- نصل أ مع د كما في الشكل (2-3) ثم ب مع ج فيتقاطع الخطان في ن.
- ننزل عمود من ن على المحور الافقي فيتقاطع معه في م فتكون القيمة المناظرة للنقطة م هي قيمة المنوال



خصائص المنوال.

- 1) لا يتأثر بالقيم المتطرفة.
- مثال (2-25): اوجد المنوال لقيم المشاهدات التالية 3، 7، 5، 3، 27، 90، 5، 3.
- الحل: المنوال = 3 وهذا يعني ان المنوال لا يتأثر بالقيم المتطرفة .
- 2) يوجد بسهولة لانه من التعريف هو القيمة الاكثر تكراراً
- 3) يمكن ايجاده من الجداول المفتوحة.
- 4) يمكن ايجاده بالرسم كما ذكرنا في الطريقة الثالثة لايجاده.

أمثلة اضافية على المنوال

مثال (2-26): اوجد المنوال ان امكن لقيم المشاهدات التالية.

13،12،10،19،7

الحل: لا يوجد منوال لهذه المشاهدات لان ايا من القيم لم يتكرر.

مثال (2-27): اوجد المنوال ان امكن لقيم المشاهدات التالية.

17،19،17،25،25،10،19،17.

الحل: المنوال = 17 لأن هذا الرقم له أكبر تكرار

مثال (2-28): اوجد المنوال او المنوالات لقيم المشاهدات التالية:

11،19،11،19،17،7.

الحل: يوجد منوالان هما 11، 19.

مثال (2-29): اوجد المنوال ان امكن لقيم المشاهدات التالية.

20،17،15،20،17،15

الحل: لا يوجد منوال لان جميع القيم لها نفس التكرار.

مثال (2-30): البيانات التالية تمثل اجور 100 عامل مبينا كما في الجدول (2 - 20):

القيم	تكرار
-70	8
-80	22
-90	40
-100	25
-110	5
	100

جدول (2 - 20)

المطلوب: إيجاد المنوال:

(أ) بطريقة الفروق (ليبرسون)

(ب) بطريقة الرافعة

(ج) بطريقة المنوال التقريبي.

الحل: (أ) طريقة ليبرسون

$$1) \text{ نجد } f_1 = 40 - 22 = 18$$

$$f_2 = 40 - 25 = 15$$

الفئة المنوالية = 90 - وحدها الأدنى = 90

$$\text{قيمة المنوال} = 90 + 10 \times \frac{18}{15+18} = 90 + \frac{180}{33}$$

$$= 95.45 = 5.45 + 90$$

(ب) طريقة الرافعة

$$\text{قيمة المنوال} = 90 + 10 \times \frac{25}{22+25}$$

$$= 90 + \frac{250}{47} = 95.32 = 4.32 + 90$$

$$(ج) \text{ المنوال التقريبي} = \frac{100+90}{2} = \frac{190}{2} = 95$$

2-4 : العلاقة الخطية بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

1) في التوزيعات وحيدة المنوال والمتنوية التواء بسيطاً وإلى الجهة اليمنى فإن ترتيب

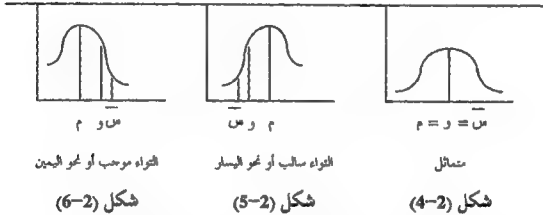
المقاييس يكون

المنوال = الوسيط = الوسط الحسابي كما هو موضح في الشكل (2-4).

(2) في التوزيعات وحيدة المتوال والمتنوعة التواءاً بسيطاً وإلى الجهة اليسرى فإن ترتيب المقاييس يكون الوسط الحسابي - الوسيط - المتوال كما في شكل (2-4) وبصيغة رموز

$$\bar{x} = \bar{y} = m$$

(3) في التوزيعات وحيدة المتوال والمتماثلة فإن الوسط الحسابي والمتوال والوسيط تنطبق على بعضها البعض كما في الشكل (2-4).



ونستطيع ان نخرج بالعلاقات الخطية التالية التي تربط المقاييس الثلاث بعضها ببعض.

(1) اذا كان التوزيع متماثلاً فإن العلاقة التي تربط المقاييس الثلاث

$\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$

..... (2-18)

(2) اذا كان التوزيع غير متماثل فإن العلاقة التي تربط المقاييس الثلاث هي:

..... (2-19) الوسط الحسابي - المتوال = $\frac{3}{2}(\bar{x} - \bar{y})$ والوسيط - الحسابي

..... (2-20) أي $\bar{x} - \bar{y} = \frac{3}{2}(\bar{x} - \bar{y})$ وكذلك $\bar{x} = \frac{\bar{x} - 3}{2}$

مثال (2-31): إذا كان الوسط الحسابي لتوزيع غير متمثل هو 50 وكان الوسيط لهذا التوزيع هو 60 أوجد المنوال لهذا التوزيع.
الحل: من العلاقة أعلاه

$$-50 = م - 3(60-50)$$

$$-50 = م - 30 \Leftrightarrow م = 30 + 50 = 80$$

مثال (2-32): إذا كان الوسط الحسابي لقيم من المشاهدات = 45 وكان الوسيط لها = 32 أوجد المنوال لها.

الحل: من العلاقة أعلاه نجد أن:

$$-45 = م - 3(32 - 45)$$

$$-45 = م - 135$$

$$-45 = م - 39$$

$$-45 = م - 39$$

$$6 = م$$

مثال (2-33): إذا كانت مجموعة من المشاهدات تتوزع توزيعاً طبيعياً متمثلاً وسطه الحسابي = 36 أوجد المنوال لهذه المشاهدات.

الحل: التوزيع متمثل.

$$\therefore \bar{م} = و = م = 36$$

وعليه فإن المنوال : 36.

أمثلة متنوعة على جميع الأوساط

مثال (2-34) : إذا كان لدينا قيم المشاهدات التالي 10،13،8،9،8،15،7

المطلوب: إيجاد ما يلي:

(1) الوسط الحسابي لقيم المشاهدات

(2) الوسيط لهذه القيم

(3) للنوال لهذه القيم.

الحل: (1) لإيجاد الوسط الحسابي نحدد من العلاقة التالية:

$$10 = \frac{70}{7} = \frac{10 + 13 + 8 + 9 + 8 + 15 + 7}{7} = \bar{x}$$

(2) لإيجاد الوسيط نرتب قيم المشاهدات ترتيباً تصاعدياً.

15	13	10	9	8	8	7
(7)	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)

نجد ترتيب الوسيط من العلاقة التالية

$$4 = \frac{1+7}{2} = \frac{1+n}{2} = \text{ترتيب الوسيط}$$

∴ قيمة الوسيط = 9 وهي القيمة المناظرة للترتيب الرابع

(3) قيمة النوال هي القيمة الأكثر تكراراً من بين القيم.

∴ قيمة النوال = 8

مثال (2-35): في شعبة مؤلفة من 100 طالب وجدان توزيع الطلاب حسب

علاماتهم كما هو مبين في الجدول (2 - 21).

فئات العلامات	عدد الطلاب
-40	8
-50	18
-60	20
-70	26
-80	16
-90	12
	100

جدول (2 - 21)

المطلوب:

- (1) إيجاد نسبة الطلاب الذين تتراوح علاماتهم بين 60، 80.
- (2) إيجاد نسبة الطلاب الذين تتراوح علاماتهم بين 52، 67.
- (3) إيجاد نسبة الطلاب الذين تتراوح علاماتهم بين 57، 84.
- (4) إيجاد الوسط الحسابي بطريقة الثلاث.
- (5) إيجاد الوسيط لهذه البيانات.

الحل:

- (1) لإيجاد نسبة الطلبة الذين تتراوح علاماتهم بين 60، 80 نرسم المخطط التالي:

لخصر عدد الطلبة الذين ضمن هذه الفترة لنجده = 20 + 26 = 46

$$\therefore \text{نسبة الطلاب} = \frac{46}{100} = 0.46$$

(5) لإيجاد نسبة الطلبة الذين تراوح علاماتهم بين 52، 67 نرسم المخطط التالي

نجد أولاً عدد الطلبة من 50 الى 52 ثم نطرح الناتج من عدد طلبة الفترة من 50 الى 60 على النحو التالي

$$10 \quad 18$$

$$2 \quad \text{س}$$

$$\text{س} = \frac{18 \times 2}{10} = 3.6 \approx 4$$

\therefore عدد الطلبة في الجزء المطلوب أولاً = 18 - 4 = 14

نجد عدد الطلبة في المطلوب من 60 الى 67 على النحو التالي

$$10 \quad 20$$

$$7 \quad \text{س}$$

$$\text{س} = \frac{20 \times 7}{10} = 14$$

\therefore عدد الطلبة ضمن الفترة المطلوبة = 14 + 14 = 28 طالباً

$$\text{نسبة الطلاب} = \frac{28}{100} = 0.28$$

$$10 \quad 18$$

$$\frac{18}{7} = \frac{126}{10} = \frac{18 \times 7}{10} = \text{س} \Leftarrow 13$$

عدد الطلاب ضمن الفئة المطلوبة = $5+26+20+6=57$. \therefore النسبة = $\frac{57}{100} = 0.57$

(7) أ) بإيجاد الوسط الحسابي بطريقة القانون العام

$$71 = \frac{7100}{100} =$$

ب- إيجاد الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات عن الوسط الفرضي حيث أ الوسط الفرضي

(8) نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد (2 - 22)

الفئات	التكرار	أقل من	التكرار المتجمع الصاعد
-40	8	$50 >$	8
-50	18	$60 >$	26
-60	20	$70 >$	46
-70	26	$80 >$	72
-80	16	$90 >$	88
100-90	12	$100 >$	100
	100		

جدول (2 - 22)

بمجموع التكرار 100

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{100}{2} = 50$$

$$46-50 \quad 4 \quad 40$$

$$\text{قيمة الوسيط} = 70 + 10 \times \frac{46-50}{40-50} = 70 + 10 \times \frac{-4}{-10} = 70 + 4 = 74$$

2-5 : المئينات والرتب المئينية

2-5-1 : مفهوم المئين :

ان تقسيم مساحة المنحنى لتوزيع تكراري الى مئة جزء متساو يسمى بالمئينات فالمئين الاول م هو القيمة التي يسبقها 1% من البيانات ويليها 99% من البيانات على فرض ان القيم مرتبة ترتيبا تصاعديا . والمئين الثلاثون (م30) هو القيمة التي يسبقها 30% من البيانات ويليها 70% من البيانات على فرض ان القيم مرتبة ترتيبا تصاعديا .

2-5-2 : كيفية ايجاد المئينات

أ- اذا كانت البيانات غير مبوية . تتبع الخطوات التالية:-

- نقوم بترتيب المشاهدات ترتيبا تصاعديا .

- نجد ترتيب المئين من العلاقة التالية:-

$$\text{ترتيب المئين المطلوب} = \frac{\text{المئين}}{100} \times (\text{عدد المشاهدات} + 1) \quad \dots (21-2)$$

وبشكل رموز يمكن صياغة العلاقة كما يلي

$$\text{ترتيب المئين} = \frac{r}{100} \times (n + 1) \quad \dots (22-2)$$

- نجد موقع المئين .

- نجد قيمة المئين المناظرة لموقعه .

مثال (2-36): البيانات التالية تمثل الرواتب لسبعة عمال اوجد المئين الاربعين لهذه الرواتب

80، 75، 60، 90، 68، 88، 64

الحل: نرتب البيانات ترتيبا تصاعديا

القيمة	90	88	80	75	68	64	60
الترتيب	(7)	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)

نجد ترتيب م40 من العلاقة أعلاه:

$$\text{ترتيب م} 40 = \frac{40}{100} (1 + 7) = 3.2$$

$3.2 \geq 4$ أي أن ترتيب م40 يقع بين الترتيب الثالث والرابع

نجد القيم المناظرة للترتيبين الثالث والرابع وهي 68، 75

$$\therefore \text{قيمة م} 40 = \frac{75+68}{2} = \frac{143}{2} = 71.5$$

وتفسير الجواب ان 40% من مجموع الرواتب تقل عن 71.5 دينار و 60% من

الرواتب تزيد عن 71.5 دينار.

(ب) إيجاد المئين لقيم المشاهدات المبوية

ويتم بطريقتين

(1) الطريقة الحسابية الاولى (2) الطريقة الحسابية الثانية

وع خطوات هاتين الطريقتين تشبه تماماً الخطوات المتبعة في إيجاد الوسيط لان

الوسيط هو عبارة عن مئين 50

(1) الطريقة الحسابية الاولى:-

- نشكل جدولاً تكرارياً متجمعا صاعداً.

$$\text{نجد ترتيب المئين} = \frac{\text{رقم المئين} \times \text{مجموع التكرارات}}{100} \quad \dots\dots\dots (23-2)$$

$$\text{وبصيغة رمزية} = \frac{م}{100} \times \sum_{i=1}^n \text{كر} \quad \dots\dots\dots (24-2)$$

- نحدد موقع ترتيب المئين ونشير اليه بسهم.

- نجد الفئة المثينة وهي الفئة التي تقع اسفل السهم الذي يحدد موقع ترتيب المثين في الفئات المنفصلة. أما في الفئات المتصلة فإن السهم يمر بين حديهما. نجد المثين من العلاقة التالية:-

المثين - الحد الأدنى للفئة المثينة +	ترتيب المثين - التكرار للتجميع الصاعد السابق
المثين - الحد الأدنى للفئة المثينة +	التكرار للتجميع الصاعد اللاحق - التكرار للتجميع الصاعد السابق

(25-2)

مثال(2-37): البيانات التالية تمثل اطوال 40 طالباً موزعين كما في الجدول (2-23):

فئات الاطوال	-15	-160	-163	-166	169 - 172
عدد الطلاب	5-	7	12	9	7

جدول (2 - 23)

المطلوب: (1) ايجاد المثين الأول (14)

(2) ايجاد المثين 30 (30م)

(3) ايجاد المثين 90 (90م)

الحل: نشكل اولاً جدولاً تكرارياً متجمعاً صاعداً (2 - 24).

فئات الاطوال	عدد الطلاب	نهاية الفئات العليا	التكرار المتجمع الصاعد
-157	5	157>	00
-160	7	160>	5
-163	12	163>	12
-166	9	166>	24
172-169	7	169>	33
		172>	40
المجموع	40		

جدول (2 - 24)

نستخرج ترتيب م_١ = $\frac{1}{100} \times 40 = \frac{4}{10} = 0.4$ ونلاحظ هنا بأن ترتيب المئين هو أقل من التكرار المتجمع الصاعد للفئة الأولى (1) وعلى هذا الأساس لانستطيع حل السؤال بهذه الطريقة الا اذا اضفنا فئة سابقة وتكرارها صفر لان ترتيب أي مئين لا بد ان يكون له تكرار متجمع صاعد سابق وتكرار متجمع صاعد لاحق.

- الفئة المئينية م_١ = 157 واقل من 160

- الحد الأدنى = 157

- طول الفئة المئينية = 157 - 160

- التكرار السابق = 0 والتكرار اللاحق = 5 وتطبيق القاعدة اعلاه نجد م_١ من العلاقة

$$\therefore \text{قيمة م}_1 = 157 + \frac{-0.4}{-5} \times 3 = 157 + 0.24 = 157.24$$

(2) لايجاد المئين 30 (م_{٣٠}%)

بالاعتماد على الجدول السابق

$$\text{نجد ترتيب المئين 30} = 40 \times \frac{30}{100} = 12$$

وفي هذه الحالة نلاحظ بأن ترتيب المئين جاء مطابقا لاحد التكرارات المتجمعة الصاعدة وهو 12 فان م_{٣٠} في هذه الحالة يساوي نهاية الفئة المناظرة للتكرار المتجمع الصاعد (12) = 163.

(3) ايجاد مئين 90 (م_{٩٠}%)

بناء على المعلومات الموجودة في الجدول اعلاه

$$\text{نجد ترتيب المئين 90} = 40 \times \frac{90}{100} = 36$$

الفئة المئينية = 169 واقل من 172 وحدها الأدنى 169

$$\text{طول الفئة} = 169 - 172 = 3$$

التكرار المتجمع الصاعد السابق = 33

التكرار المتجمع الصاعد اللاحق = 40

$$\text{قيمة م} = 169 - 3 \times \frac{33 - 36}{33 - 40} + 3 \times \frac{3}{7} = 169 - 3 \times \frac{-3}{-7} + 169 - 3 \times \frac{3}{7}$$

$$170.282 = 1.28 + 169 = \frac{9}{7} + 169$$

- إيجاد المثين بالطريقة الحسابية الثانية:

ان الخطوات لهذه الطريقة تتطابق تماما مع الخطوات المستخدمة في الطريقة

الحسابية الثانية لإيجاد الوسيط لان الوسيط هو مئين 50 ي 50م.

مثال (2-38): باستخدام البيانات الواردة في المثال اعلاه اوجد ما يلي:-

$$(1) \text{ م} 11 \quad (2) \text{ م} 90$$

الحل: لإيجاد م₁₁ نتبع ما يلي:-

$$(1) \quad \text{نجد ترتيب م} 11 = 40 \times \frac{1}{100} = 0.4 \text{ ثم نحدد الموقع}$$

الفئة المثنية التكرار المتجمع الصاعد

$$5 \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad 0.4 \quad \begin{bmatrix} 157 \\ 11 \\ 163 \end{bmatrix} \quad 3$$

$$\frac{0.4}{5} = \frac{12}{5} = 2.4 \text{ م} \therefore 1.2 = 5 \text{ م} \therefore 1.2 = 5 \text{ م} \therefore 1.2 = 5 \text{ م}$$

$$\therefore \text{مئين } 11 = (11) = \text{الحد الأدنى للفئة المثنية} + \text{قيمة م} = 157 + 0.24 = 157.24$$

$$160.3 = 0.3 + 160 =$$

(2) إيجاد مئين 90

التكرار المتجمع الصاعد

الفئة المئينية

$$7 \left[\begin{array}{c} 33 \\ 36 \\ 40 \end{array} \right] 3$$

$$3 \left[\begin{array}{c} 169 \\ 90م \\ 172 \end{array} \right] 3$$

$$\frac{3}{7} = \frac{س}{3} \quad \text{نضرب ضربا تبادليا فنجد أن } 7س = 9 \leftarrow س = \frac{9}{7} = 1.28$$

$$\therefore 170.28 = 169 + 1.28 = 90م$$

تفسير نتيجة م 170.28 = 157.24 ان 1٪ من اطوال الطلاب تقل عن 157.24 وان

99٪ من الطلاب تزيد اطوالهم عن 157.24

تفسير نتيجة م 90 ان 90٪ من الطلاب تقل اطوالهم عن 170.28 وان 10٪ من

الطلاب تزيد اطوالهم عن 170.28

2-5-3) الترتيب المئيني:

نود أن نقارن بين المئين والترتيب المئيني. لو فرضنا انه يوجد لدينا جدول تكراري يحتوي على اطوال لعدد من الطلاب ونفترض اننا قمنا باستخراج المئين 80 وحصلنا على قيمة رقمية هي 168.9 وتفسير هذه القيمة ان 80٪ من الطلاب تقل اطوالهم عن 168.9 وان 20٪ منهم تزيد اطوالهم عن 168.9 ولو فرضنا ان طالبا طوله 170 سم وطلب اليه ان نجد نسبة الطلاب الذين تقل اطوالهم عن هذه القيمة (170سم) فانه لابد من استخراج الترتيب المئيني

مثال (2-39): البيانات في جدول (2-25) تمثل الاجور الاسبوعية ل(40) عاملا

أوجد نسبة العمال الذين تقل اجورهم عن 17 دينار

فئات الاجور	-12	-14	-16	20-18
عدد العمال	15	13	10	2

جدول (2 - 25)

الحل: تشكل الجدول (2-26):

فئات الاجور	عدد العمال	التكرار المتجمع الصاعد
-12	15	15
-14	13	28
-16	10	38
20-18	2	40

جدول (2 - 26)

نجد الترتيب المثبي من العلاقة التالية:

..... (2 - 26)

$$ق = ح + \frac{\frac{ك}{100} \times ج - م}{ل}$$

حيث

ق = القيمة المعطاة والمراد استخراج الترتيب المثبي لها وفي المثال اعلاه ق=17

ح = الحد الادنى للفئة التي تقع فيها القيمة المعطاة

$$\frac{ك}{100} = \text{الترتيب المثبي}$$

ج = مجموع التكرارات

م = التكرار المتجمع الصاعد للفئة التي تسبق الفئة التي تقع فيها القيمة المعطاة

ف= التكرار العادي التي تقع فيها القيمة

ل= طول الفئة.

الحل: نطبق العلاقة أعلاه.

$$17 = 16 + 2 \times \frac{(28 - 40 \times \frac{ك}{100})}{10}$$

$$170 = 160 + (28 - \frac{40ك}{100}) \times 2$$

$$170 = 160 + 56 - \frac{80ك}{100}$$

$$17000 = 16000 + 5600 - 80ك$$

$$17000 - 16000 - 5600 = -80ك$$

$$-600 = -80ك$$

$$ك = \frac{600}{80} = 7.5\%$$

وتفسير هذا الجواب ان 82.5 من مجموع العمال تقل اجورهم عن 17 دينار.

مثال (2-40): البيانات التالية تمثل اوزان 50 طالبا موزعة كما هو في الجدول

(27-2) والمطلوب إيجاد نسبة الطلاب الذين تقل اوزانهم عن 68

كغم.

فئات الاوزان	54-50	59-55	64-60	69-65	74-70	المجموع
عدد الطلاب	10	12	8	14	6	50

جدول (2 - 27)

الحل: نكون جدول الحل (2 - 28).

فئات الازان	عدد الطلاب	الحدود الفعلية	التكرار المتجمع الصاعد
54-50	10	54.5-49.5	10
59-55	12	59.5-54.5	22
64-60	8	64.5-59.5	30
69-65	14	69.5-64.5	44
74-70	6	74.5-69.5	50
المجموع	50		

جدول (2 - 28)

ثم بتطبيق العلاقة أعلاه:

$$5 \times \frac{30-50 \times \frac{ك}{100}}{14} + 64.5 = 68$$

$$5 \times (30 - \frac{ك50}{100}) + 903 = 952$$

$$150 - \frac{ك250}{100} + 903 = 952$$

$$95200 = 90300 + 250ك - 15000$$

$$95200 - 90300 = 250ك - 15000$$

$$4900 = 250ك$$

$$19900 = 250ك$$

$$ك = \frac{19900}{250} = 79.6\%$$

2-6: العشرات والربيعات :

2-6-1) العشرات :

مفهوم العشرات: هو تقسيم مساحة المنحنى لتوزيع تكراري الى عشرة اقسام متساوية وكل قسم يسمى عشر. فمثلا العشر الثالث هو القيمة التي يسبقها $\frac{3}{10}$ البيانات ويلها $\frac{7}{10}$ من البيانات على فرض أن القيم مرتبة ترتيبا تصاعديا. والوسيط هو العشر الخامس ويوجد تسعة عشرات.

2-6-1: العشرات وكيفية إيجادها :

لإيجاد العشرات :

أ- البيانات غير المبوبة: وفي هذه الحالة تتبع الخطوات التالية:

- نرتب البيانات تصاعديا

- نجد ترتيب العشر

- نحدد الترتيب الأدنى والرتيب الأعلى لترتيب العشر

- نجد القيم المناظرة للترتيبين

- نجد قيمة العشر من الوسط الحسابي للقيمتين المناظرتين للترتيبين.

مثال (2-41): البيانات التالية تمثل علامات 8 طلاب من 50 في مادة الاحصاء

41، 32، 46، 28، 36، 20، 35، 23

والمطلوب إيجاد:

(1) العشر الثالث مع تفسير النتيجة

(2) العشر الثامن مع تفسير النتيجة.

الحل: 1) لإيجاد العشر الثالث تتبع الخطوات التالية:

- ترتب البيانات ترتيباً تصاعدياً على النحو

القيم. 46 41 36 35 32 28 23 20

الترتيب (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8)

$$\text{ترتيب العشر الثالث} = \frac{30}{100} = (1+n) \times \frac{30}{100} = (1+8) \times \frac{30}{100} = 9 \times \frac{30}{100} = \frac{270}{100} = 2.7$$

$2.7 > 3$ ترتيب العشر الثالث يقع بين الترتيب الثاني والثالث

بجد القيمتين المناظرتين للترتيب الثاني والثالث وهما على التوالي 23، 28

$$\therefore \text{العشر الثالث} = \frac{28+23}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$$

تفسير النتيجة (25.5) أي أن 30٪ من عدد الطلاب تقل علاماتهم عن 25.5 وأن

70٪ من عدد الطلاب تزيد علاماتهم على 25.5

2) لإيجاد العشر الثامن:

نستفيد من ترتيب البيانات في التمرين السابق

ترتيب العشر الثامن

$$72 = \frac{80}{100} = 9 \times \frac{80}{100} = (1+8) \times \frac{80}{100} = (1+n) \times \frac{80}{100} =$$

$72 > 7$ نلاحظ أن ترتيب العشر الثامن يقع بين الترتيب السابع والثامن.

بجد القيمتين المناظرتين للترتيبين السابع والثامن وهما على التوالي 41، 46

$$\text{العشر الثامن} = \frac{46+41}{2} = \frac{87}{2} = 43.5$$

تفسير النتيجة (43.5) أي أن 80٪ من الطلاب علاماتهم تقل عن 43.5 و 20٪ من

الطلاب علاماتهم تزيد عن 43.5

ب) العشريرات للبيانات المبوبة

وتوجد بطريقتين

1- الطريقة الحسابية الاولى 2- الطريقة الحسابية الثانية

وخطوات هاتين الطريقتين مطابقة تماما كخطوات المتبعة في كل من الوسيط، والمتين، والربيعات.

مثال (2-42): أوجد العشر الثالث للبيانات المبوبة في الجدول (2 - 29)

الفئات	6-4	9-7	12-10	15-13	المجموع
التكرار	3	4	6	5	18

جدول (2 - 29)

الحل: لايجاد العشر الثالث تتبع الخطوات التالية:

- نشكل جدول الحل (2 - 30)

الفئات	التكرار	الحدود الفعلية	نهاية الفئات العليا	التكرار المتجمع الصاعد
6-4	3	6.5-3.5	6.5 >	3
9-7	4	9.5-6.5	9.5 >	7
12-10	6	12.5-9.5	12.5 >	13
15-13	5	15.5-12.5	15.5 >	18

جدول (2 - 30)

$$- \text{ترتيب العشر الثالث (30)} = 18 \times \frac{30}{100} = 5.4 \approx 5$$

الفئة العشرية = 6.5-9.5

الحد الادنى للفئة العشرية 6.5

طول الفئة العشرية = 9.5-6.5 = 3

التكرار المتجمع السابق = 3

التكرار المتجمع اللاحق=7

نطبق العلاقة التالية:

العشير المطلوب =

$$\text{نرتب العشور - فنكرر التجمع السابق لرتيب العشور} \\ \text{الحذ الأدنى للفئة العشوية} + \frac{\text{طول الفئة} \times \text{التكرار المتجمع اللاحق لرتيب العشور} - \text{التكرار المتجمع السابق لرتيب العشور}}{\text{الحد الأدنى للفئة العشوية} - \text{الحد الأعلى للفئة العشوية}} \\ \text{التكرار المتجمع اللاحق لرتيب العشور} - \text{التكرار المتجمع السابق لرتيب العشور}$$

$$8.3 = 1.8 + 6.5 = \frac{7.2}{4} + 6.5 = \frac{24}{4} + 6.5 = 3 \frac{3-54}{3-7} + 6.5$$

ابجاد العشير الثالث 30 بالطريقة الحسابية الثانية

بناء على الجدول المشكل اعلاه نقوم بكتابة العمودين التاليين:

التكرار المتجمع الصاعد

الفئة العشيرية

$$4 \begin{bmatrix} 3 \\ 5.4 \\ 7 \end{bmatrix} 2.4 \quad \text{س} \quad \begin{bmatrix} 6.5 \\ \text{الثالث} \\ 9.5 \end{bmatrix} 3$$

$$\frac{24}{4} = \frac{\text{س}}{3}$$

بالضرب التبادلي نحصل على س=7.2

$$1.8 = \frac{7.2}{4} = \text{س}$$

العشير الثالث = الحد الأدنى للفئة العشيرية+قيمة س

$$8.3 = 1.8 + 6.5 =$$

وتفسير النتيجة(8.3) هي أن 30% من مجموع البيانات تقل عن 8.3 و70% من البيانات تزيد على هذه القيمة.

2-6-2) الربيعات

ان مفهوم الربيعات هو تقسيم مساحة المنحنى لتوزيع تكراري الى اربعة اجزاء متساوية يسمى بالربيعات ويوجد ثلاثة ربيعات مرتبة من اليسار الى اليمين وهي الربيع الاول او الربيع الادنى او م25 والربيع الثاني او الوسيط او م50 والربيع الثالث او الربيع الاعلى او م75 وعلى فرض ان البيانات مرتبة ترتيبا تصاعديا فاننا نعرف كل ربيع على حده.

تعريف: الربيع الاول هو القيمة التي يسبقها ربع البيانات ويلها ثلاثة ارباع البيانات. وسنرمز له بالرمز ر1.

تعريف: الربيع الثاني هو القيمة التي يسبقها نصف البيانات ويلها النصف الآخر. وسنرمز له بالرمز ر2.

تعريف: الربيع الثالث هو القيمة التي يسبقها ثلاثة ارباع البيانات ويلها ربع البيانات. وسنرمز له بالرمز ر3.

والربيعات هي من أشباه مقاييس النزعة المركزية ويمكن إيجادها:

أ- من البيانات غير المبوبة (المفردة) ومن أمثلتها:

1) الربيع الأدنى (الأول) (ر1 أو م25) وكيفية إيجادها.

- نرتب البيانات ترتيبا تصاعديا.

- نجد ترتيب الربيع الادنى من العلاقة التالية:

$$(28-2) \dots\dots\dots \boxed{(1+n) \frac{25}{100} = 25م}$$

- نجد موقع ترتيب الربيع الادنى بين الترتيب.

- نجد القيم المناظرة للترتيب التي تحصر ترتيب الربيع الأدنى.
- نجد قيمة الربيع الأدنى من العلاقة.
- قيمة الربيع الأدنى = المتوسط الحسابي للقيمتين المناظرتين اللتين تحصران الربيع الأدنى.
- الربيع الثاني (الوسيط 50) يمكن إيجادها كما مر في الوسيط.
- إيجاد الربيع الثالث أو 75 أو الربيع الأعلى وتنبع الخطوات التالية:

(1) نرتب القيم ترتيباً تصاعدياً.

(2) نجد ترتيب الربيع الثالث من العلاقة.

$$\text{ترتيب الربيع الثالث (75)} = \frac{75}{100} (1 + n)$$

(3) نحدد موقع ترتيب الربيع الثالث من بين الترتيب للقيم.

(4) نجد القيم المناظرة للترتيب التي تحصر الربيع الثالث.

(5) نجد قيمة الربيع الثالث من العلاقة.

قيمة الربيع الثالث = المتوسط الحسابي للقيمتين المناظرتين اللتان تحصران الربيع الأعلى.

مثال (2-43): البيانات التالية تمثل علامات ستة طلاب من عشرة درجات

5،6،8،7،1،9 اوجد مايلي :

(1) الربيع الأدنى مع تفسير النتيجة.

(2) الربيع الأعلى مع تفسير النتيجة.

الحل: (1) لإيجاد الربيع الأدنى تتبع الخطوات التالية :

- نرتب البيانات تصاعدياً على النحو التالي

10	9	8	7	6	5
(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)

- نجد ترتيب الربيع الأدنى = $\frac{25}{100} = (1+n) \frac{1}{4} = (1+6) \frac{1}{4} = 7 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 1.75$

- نحدد موقع الربيع الأدنى $1.57 > 1 > 2$

- نجد القيم المناظرة للترتيبين الاول والثاني وهما على التوالي 65،

الربيع الأدنى = $\frac{6+5}{2} = \frac{11}{2} = 5.5$

و معنى هذه النتيجة ان 25٪ من الطلبة تقل علاماتهم عن 5.5 وان 75٪

من الطلبة تزيد علاماتهم عن 5.5

(2) الربيع الاعلى أو الثالث (3 أو 75٪)

لإيجاد الربيع الأعلى

نجد ترتيب الربيع الاعلى = $\frac{75}{100} = (1+n) \frac{3}{4} = (1+6) \frac{3}{4} = 7 \times \frac{3}{4} = \frac{21}{4} = 5.25$

نحدد موقع ترتيب المئين

$5.25 > 5 > 6$ أي ترتيب الربيع الاعلى يقع بين الترتيبين الخامس والسادس

نجد الارقام المناظرة للترتيب الخامس والسادس وهي على التوالي 9، 10

∴ الربيع الاعلى = $\frac{10+9}{2} = \frac{19}{2} = 9.5$ وتفسير النتيجة كما يلي

أي ان 75٪ من الطلاب علاماتهم تقل عن 9.5 وان 25٪ من الطلاب

علاماتهم تزيد عن 9.5.

ب) إيجاد الربيعات من البيانات المبوبة

ويمكن إيجادها بطريقتين

(1) الطريقة الحسابية (2) الطريقة البيانية

(1) الطريقة الحسابية

وتقسم الى طريقتين:

(1) الطريقة الحسابية الاولى (2) الطريقة الحسابية الثانية

ان الخطوات المتبعة لهاتين الطريقتين هي نفس الخطوات المتبعة لهاتين الطريقتين في كل من الوسيط والمئينات ولذلك لاداعي لذكرها مرة أخرى.

مثال (2-44): البيانات التالية تمثل الاتفاق الشهري لعشر أسر موزعة كما في

الجدول (2-31):

فئات الاتفاق الشهري	79-70	89-80	99-90	109-100
عدد الأسر	2	3	1	4

جدول (2 - 31)

المطلوب إيجاد مايلي:

أ) إيجاد الربيع الأدنى بالطريقة الحسابية الاولى والثانية.

ب) إيجاد الربيع الأعلى بالطريقة الحسابية الأولى والثانية.

ج) إيجاد الربيع الأدنى والأعلى بالطريقة البيانية

الحل: أ) إيجاد الربيع الأدنى بالطريقة الحسابية الاولى والحسابية الثانية

نشكل جدول تكراري متجمع صاعد (2 - 32)

فئات الانفاق الكلي	عدد الاسر	الفئات الفعلية	نهاية الفئات	تكرار المتجمع صاعد
60-69	∴	59.5-69.5	69.5>	∴
70-79	2	69.5-79.5	79.5>	2 ترتيب الربع الأدنى
80-89	3	79.5-89.5	89.5>	5
90-99	1	89.5-99.5	99.5>	6 ترتيب الربع الأعلى
100-109	4	99.5-109.5	109.5>	10
المجموع	10			

جدول (2 - 32)

يحدد ترتيب الربع الأدنى $= \frac{25}{100} \times \text{مجموع التكرارات}$

$$2.5 = 10 \times \frac{25}{100}$$

فئة الربع الأدنى وهي التي تقع أسفل السهم مباشرة = 79.5-89.5 أو فوق السهم في عمود نهاية الفئات.

الحل الأدنى للفئة الربعية = 79.5

طول الفئة الربعية = 89.5-79.5 = 10

التكرار المتجمع السابق = 2

التكرار المتجمع اللاحق = 5

إيجاد الربع الأدنى حسب العلاقة.

$$= 79.5 + \frac{2-25}{2-5} \times 10$$

$$= 79.5 + 10 \times \frac{05}{3} + 79.5 = 167 + 167 = 334$$

إيجاد الربيع الأدنى بالطريقة الحسابية الثانية

بالاعتماد على الجدول المشكل اعلاه نكتب العمودين التاليين:

التكرار المتجمع الصاعد

الفئة الربعية

$$3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2.5 \\ 5 \end{bmatrix} 0.5 \quad \text{س} \quad \begin{bmatrix} 79.5 \\ \text{الربيع الأدنى} \\ 89.5 \end{bmatrix} 10$$

$$\frac{0.5}{3} = \frac{\text{س}}{10}$$

نتيجة للضرب التبادلي فان $3\text{س} = 5 \Leftrightarrow \text{س} = 1.67$

الربيع الأدنى = الحد الأدنى للفئة الربعية + قيمة س

$$81.17 = 1.67 + 79.5 =$$

(2) إيجاد الربيع الأعلى بالطريقة الحسابية الأولى والثانية

إيجاده بالطريقة الأولى

$$7.5 = \frac{750}{100} = 10 \times \frac{75}{100} = \text{نجد ترتيب الربيع الأدنى}$$

$$\text{الفئة الربعية} = 99.5 - 109.5$$

$$\text{الحد الأدنى} = 99.5$$

$$\text{طول الفئة} = 109.5 - 99.5 = 10$$

التكرار المتجمع الصاعد السابق = 6

التكرار المتجمع الصاعد اللاحق = 10

نجد الربيع الأعلى من العلاقة التالية:

$$10 \times \frac{15}{4} + 99.5 = 10 \times \frac{6-7.5}{6-10} + 99.5 = \text{الربيع الأعلى}$$

$$103.25 = 3.75 + 99.5 = \frac{15}{4} + 99.5 =$$

إيجاد الربيع الاعلى بالطريقة الحسابية الثانية

بالاعتماد على الجدول المشكل اعلاه نكتب العمودين التاليين:

التكرار المتجمع الصاعد	الفئة الربعية
$4 \begin{bmatrix} 6 \\ 7.5 \\ 10 \end{bmatrix} 15$	$10 \begin{bmatrix} 99.5 \\ \text{الربيع الاعلى} \\ 109.5 \end{bmatrix} س$
	$\frac{15}{4} = \frac{س}{10}$

بالضرب التبادلي $4س = 15$

$$س = \frac{15}{4} = 3.75$$

الربيع الاعلى = الحد الادنى للفئة الربعية + قيمة س

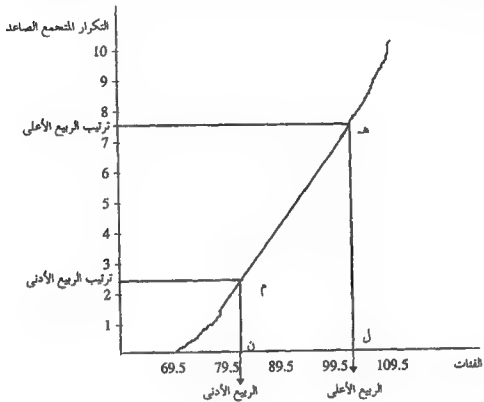
$$103.25 = 99.5 + 3.75 =$$

ب- طريقة إيجاد الربيع الادنى والاعلى بيانها

وهذا هو المطلوب (3) من مطالب السؤال السابق وتتبع الخطوات التالية:

- نرسم محورين متعامدين . ثم نرصد على المحور الافقي الحدود العليا للفئات وعلى المحور الرأسى التكرارات المتجمعة الصاعدة.
- نعين النقاط التى احداثيها الاول يمثل الفئات والاحداثى الثانى يمثل التكرار.
- نصل بين النقاط المعينة بخط منحني فيتكون لدينا منحنى تكراري متجمع صاعد.
- نجد ترتيب الربيع الادنى ثم نعينه على المحور الرأسى ونقيم من نقطة التعين عموداً على المحور الرأسى فيقطع المنحنى في نقطة مثل م.

- نزل من النقطة م عموداً على المحور الأفقي فيقطعه في نقطة ن فيتعين عندها قيمة الربيع الأدنى وفي مثالنا نجد من الرسم ان قيمة الربيع الأدنى هي 81.17 وبالمثل فإن الربيع الأعلى هو 103.25 تقريباً انظر الى الشكل (2 - 7)



شكل (2 - 7)

تمارين عامة على الوحدة الثانية

س 1 : البيانات التالية تمثل فئات الاوزان لـ 100 طالب مبنية بالجدول التالي .

فئات الاوزان	عدد الطلاب
~40	8
~45	18
~50	44
~55	20
65-60	10

المطلوب: إيجاد ما يلي

(1) الوسط الحسابي باي طريقة (2) الوسط باي طريقة

(3) المتوسط باي طريقة (4) العشر الثالث.

(5) المتين السبعون (6) الربيع الثالث.

(7) الربيع الأول

س 2 : البيانات التالية تمثل الاجور الاسبوعية لمائة عامل مبنية بالجدول:

فئات الاجر	44-40	49-45	54-50	59-55	64-60
عدد العمال	10	20	40	20	10

والمطلوب (1) رسم المنحنى التكراري لهذه البيانات

(2) إيجاد الوسط الحسابي لهذه البيانات بطرقه المختلفة.

(3) إيجاد الوسيط لهذه البيانات بطرقه المختلفة.

(4) إيجاد المتوال لهذه البيانات بطرقه المختلفة.

(5) إيجاد م_{10%}، م_{25%}، م_{50%}، م_{75%}

س3: في عينة مكونة من (10) مفردات كانت قيم المشاهدات عن المتغير هي :-

س₁ = 4، س₂ = 8، س₃ = 3، س₄ = 5، س₅ = 2، س₆ = 10، س₇ = 2، س₈ = 4،
س₉ = 4، س₁₀ = 8.

المطلوب (1) إيجاد الوسيط الحسابي لهذه المشاهدات

(2) تعيين قيمة الوسيط.

(3) حساب الوسيط التوافقي لقيم المشاهدات س₁، س₂، س₃

(4) إيجاد ل₁، ل₃، ع₁، ع₃، م₈₀ لهذه المشاهدات. حيث ر₁ : الربيع الأول،

ر₃ : الربيع الثالث، ع₂ : العشر الأول، ع₃ : العشر الثالث، م₈₀ : المئين الثمانون.

الفصل الثالث

مقاييس التشتت

مقدمة:

قبل الخوض في أهم مقاييس التشتت نرى لزوماً توضيح فكرة التشتت واعطاء معنى واضح للتشتت.

معنى التشتت بشكل عام: هو تباعد القيم عن بعضها لكن هذا بدوره يحمل بطياته عدة تساؤلات لعدم تجانس البيانات في بعض أوقاته لذا اتفق على ان يكون هناك نقطة ثابتة لقياس التباعد او التقارب عن هذه النقطة ووجد ان الوسط الحسابي خير ممثل لهذه النقطة حيث ان غالبية النقاط تكون قريبة نحو هذه النقطة وقد يكون

- هذا البعد كبيراً أي ان البيانات مبعثرة.

- هذا البعد قليلاً أي ان البيانات غير مبعثرة.

- او قد يكون هذا البعد متساوي أي لا يوجد تشتت

ولعل أهم مقاييس التشتت نذكر منها ما يلي

3-1- المدى

أ) المدى للبيانات غير المبوية : وهو أبسط مقاييس التشتت وهو الفرق بين أكبر قيمة

واصغر قيمة. ويمكن إيجادها من العلاقات التالية:

$$\text{المدى} = \text{أكبر قيمة} - \text{أصغر قيمة} \dots\dots\dots (3 - 1)$$

ملاحظة: قد تبرز في بعض البيانات بعض القيم المتطرفة كثيراً وبما ان المدى يعتمد

على أكبر وأصغر قيمة لذا فإنه يتأثر مباشرة ويكون البعد كبيراً. لذا ينصح

بمخاف القيم المتطرفة الصغرى والكبرى. ويبرز مقاييس تشتت مشابهة

للمدى نذكر منها :

(1) المدى المئيني = المئين الاعلى - المئين الادنى
(2-3) $100 - 12 =$ المئين التاسع والتسعون - المئين الاول

(2) نصف المدى المئيني = $\frac{100 - 12}{2} = \frac{\text{المئين التاسع والتسعون} - \text{المئين الاول}}{2}$
(3-3)

(3) المدى العشري = العشر التاسع - العشر الاول = $90 - 10 =$
(4-3)

(4) نصف المدى العشري = $\frac{\text{العشر التاسع} - \text{العشر الاول}}{2}$
(5-3)

(6-3) نصف المدى العشري = $\frac{90 - 10}{2}$

(5) المدى الربيعي = الربيع الاعلى - الربيع الادنى
(7-3) $75 - 25 =$

(6) نصف المدى الربيعي = $\frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{2}$
(8-3) $\frac{75 - 25}{2} =$

مثال (3-1): اذا كان لدينا البيانات التالية تمثل درجات عشرة طلاب من 50 وهي :
 39, 41, 21, 27, 34, 43, 25, 37, 28, 22

والمطلوب إيجاد

(1) المدى المطلق (2) نصف المدى الربيعي

الحل : لإيجاد المدى المطلق نتبع ما يلي

- نرتب المشاهدات ترتيباً تصاعدياً

21	22	25	27	28	34	37	39	41	43
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

(1) المدى المطلق = أعلى مشاهدة - أصغر مشاهدة

$$22 - 21 - 43 =$$

(2) لإيجاد نصف المدى الربيعي.

أ) نجد الربيع الأدنى أو 25^m كما يلي :

- ترتيب الربيع الأدنى من العلاقة التالية

$$\text{ترتيب الربيع الأدنى} = \frac{25}{100} = (1+10) \frac{25}{100} = \frac{275}{100} = 2.75$$

- نجد موقع ترتيب الربيع ويقع بين الترتيب الثاني والثالث.

- نجد القيم المناظرة للترتيبين الثاني والثالث وهما 22، 25 تكون قيمة الربيع

$$\text{الأول} = \frac{1}{2} (22 + 25) = 23.5$$

(2) لإيجاد الربيع الأعلى أي 75^m باتباع الخطوات التالية

- نجد ترتيب الربيع الأعلى من العلاقة.

$$\text{ترتيب الربيع الأعلى} = \frac{75}{100} = (1+10) \frac{75}{100} = \frac{825}{100} = 8.25$$

نجد موقع الترتيب من بين الترتيب فيقع بين الترتيب الثامن والتاسع

- نجد القيم المناظرة للترتيبين وهما 39، 41.

$$\text{- فيكون قيمة الربيع الأعلى هي } \frac{1}{2} (39 + 41) = 40$$

$$\text{وعليه فإن نصف المدى الربيعي} = \frac{40 - 23.5}{2} = \frac{16.5}{2} = 8.25$$

(ب) إيجاد المدى المطلق للبيانات المبوبة :

نجد المدى المطلق من العلاقات التالية .

المدى المطلق = الحد الاعلى الفعلي للفتة العليا-الحد الادنى الفعلي للفتة الدنيا(3-9)

وهناك علاقة أخرى :

....(3-10)

المدى المطلق = مركز الفتة العليا - مركز الفتة الدنيا

ولتجنب القيم المتطرفة حتى نحصل على مقياس تشتت له فاعلية نجد احد المقاييس الواردة في البند السابق وذلك حسب وجود القيم المتطرفة في البيانات. وستركز دراستنا على نوع منها وذلك نظرا لأهمية هذا المقياس واستخدامه في أكثر من مجال.

3-2) نصف المدى الربيعي وطرق ايجاده.

لقد استعرضنا في البند السابق كيفية إيجاد نصف المدى للبيانات غير المبوبة والآن نستخدم نفس الصيغ للقيم المبوبة.

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{2}$$

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{23^{\text{م}} - 75^{\text{ع}}}{2}$$

ولتوضيح كيفية الاستخدام نورد المثال التالي :

مثال (3-2) : البيانات التالية تمثل الرواتب الشهرية ل 60 موظفاً يعملون في احد

المؤسسات مبوبة كما في الجدول (3-1)

فئات الرواتب	90-	100-	110-	120-	130-	140-	150-	المجموع
	99	109	119	129	139	149	159	
عدد الموظفين	5	9	11	17	11	3	2	60

جدول (3 - 1)

المطلوب: أ- إيجاد المدى المطلق

ب- إيجاد نصف المدى الربيعي

الحل: نكون جدول الحل (3 - 2)

مرکز الفئة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الفعلي الاعلى	الحدود الفعلية	عدد الموظفين	فئات الرواتب
94.5	5	$99.5 >$	$99.5 - 89.5$	5	99-90
104.5	14	$109.5 >$	$109.5 - 99.5$	9	109-100
114.5	25	$119.5 >$	$119.5 - 109.5$	11	119-110
124.5	42	$129.5 >$	$129.5 - 119.5$	17	129-120
134.5	53	$139.5 >$	$139.5 - 129.5$	11	139-130
144.5	58	$149.5 >$	$149.5 - 139.5$	5	149-140
154.5	60	$159.5 >$	$159.5 - 149.5$	2	159-150
				60	المجموع

جدول (3 - 2)

المدى المطلق = الحد الاعلى للفئة العليا - الحد الادنى للفئة الدنيا

$$= 159.5 - 89.5 = 70$$

المدى المطلق عن طريق مراكز الفئات

$$= 154.5 - 94.5 = 60$$

ب- إيجاد نصف المدى الربيعي من العلاقة التالية

<p>الربيع الثالث - الربيع الأول</p> <p>نصف المدى الربيعي = $\frac{\text{الربيع الثالث} - \text{الربيع الأول}}{2}$</p>
--

(3 - 11)

أو أي من الصيغ السابقة الذكر وكلها تؤدي إلى نفس المفهوم.

1) نجد الربيع الاول باتباع الخطوات التالية :

- نجد ترتيب الربيع الاول وهو

$$\text{ترتيب الربيع الاول} = \frac{60 \times 25}{100} = 15$$

نحدد موقع الربيع الاول في عمود التكرار المتجمع الصاعد ونشير اليه بالسهم.

- نحدد الفئة الربيعية وهي الفئة التي تقع اسفل السهم.

$$\text{وهي } 109.5 - 119.5$$

- نجد الحد الادنى للفئة = 109.5 .

- نجد الربيع الاول من العلاقة التالية.

$$\text{الربيع الاول} = 109.5 + 10 \times \frac{14 - 15}{14 - 25} = 109.5 + \frac{10}{11} = 110.4$$

2) نجد الربيع الثالث باتباع الخطوات التالية :

- نجد ترتيب الربيع الثالث

$$\text{ترتيب الربيع الثالث} = \frac{75}{100} \times 60 = 45$$

- نحدد موقع الترتيب على عمود المتجمع الصاعد.

- نشير الى الموقع بسهم .

- نحدد الفئة الربيعية وهي الفئة الواقعة اسفل السهم

$$= (129.5 - 139.5)$$

$$= \text{نحدد الحد الادنى} = 129.5$$

نجد الربيع الثالث من العلاقة التالية

$$\text{الربيع الثالث} = 129.5 + 10 \times \frac{42 - 45}{42 - 53}$$

$$= 129.5 + \frac{30}{11} = 129.5 + 2.73 = 132.23 \text{ باستخدام علاقة أعلاه فإن}$$

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{110.40 - 132.23}{2} = 10.915$$

3-3 : الانحراف المعياري :

لعمل هذا المقياس من أهم مقاييس التشتت وحتى نصل إلى مفهوم هذا المقياس فلا بد من استعراض المقاييس التالية والتي ستؤدي بدورها إلى مقياس الانحراف المعياري.

3-3-1 : الانحراف المتوسط

تعريف : الانحراف المتوسط : هو مقياس من مقاييس التشتت يقيس بدقة الانحراف عن الوسط الحسابي وهو يمثل متوسط القيم المطلقة لانحرافات قيم المشاهدات عن وسطها الحسابي. وقد تكون هذه المشاهدات.

(أ) المشاهدات أو البيانات غير مبوية :

ولإيجاد الانحراف المتوسط لهذه البيانات تتبع الخطوات التالية.

- نجد المتوسط الحسابي لقيم المشاهدات

- نجد الانحرافات المطلقة عن الوسط الحسابي من العلاقة.

$$|x_i - \bar{x}| = |x_i - \bar{x}| \text{ حيث } \bar{x} = \text{هو انحراف كل مشاهدة عن وسطها الحسابي}$$

- نجد الانحراف المتوسط من العلاقة

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} \quad (12-3) \dots$$

حيث n عدد المشاهدات

مثال (3-3): أوجد الانحراف المتوسط لقيم المشاهدات التالية

$$10, 14, 16, 13, 7$$

الحل : لحل مثل هذه المسائل تتبع الخطوات التالية

- نجد المتوسط الحسابي لمجموعة القيم

$$\bar{x} = \frac{10+14+16+13+7}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

- نجد الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات

$$|x_1 - \bar{x}| = |10 - 12| = 2$$

$$|x_2 - \bar{x}| = |14 - 12| = 2$$

$$|x_3 - \bar{x}| = |16 - 12| = 4$$

$$|x_4 - \bar{x}| = |13 - 12| = 1$$

$$|x_5 - \bar{x}| = |7 - 12| = 5$$

فيكون الانحراف المتوسط والذي سوزم له بالرمز أ.م.

$$A.M. = \frac{2+2+4+1+5}{5} = \frac{14}{5} = 2.8$$

ب- إذا كانت البيانات مبوبة

لذا تتبع الخطوات التالية

- نجد مراكز الفئات ولتكن x_1, x_2, \dots, x_n

- نجد الوسط الحسابي من العلاقة

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^n x_j \cdot h_j}{\sum_{j=1}^n h_j}$$

- نجد الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات عن وسطها الحسابي على النحو

ح - سر - تن ثم نأخذ القيمة المطلقة لتصبح :

$$|س - تن| = |س - ح|$$

- نجد حاصل ضرب $|س - ح| \times ك$

- نجد الانحراف المتوسط من العلاقة

.....(13-3)

$$\frac{\sum_{i=1}^n |س - ح| \times ك}{\sum_{i=1}^n ك} = \text{أ.م.} = \text{الانحراف المتوسط}$$

مثال (3-4): البيانات التالية تمثل اوزان مئة طالب مبربة كما في الجدول (3-3)

فئات الازنان	-40	-45	-50	-55	-60	-65	المجموع
عدد الطلاب	7	18	40	20	10	5	100

جدول (3-3)

والمطلوب إيجاد الانحراف المتوسط لهذه الازنان

الحل: نكون الجدول (3-4) التالي الذي يشمل جميع البيانات اللازمة للحل.

فئات الازنان	عدد الطلاب ك	مركز الفئات سر	سر \times ك	$ س - ح = س - تن $	ح \times ك
-40	7	42.5	297.5	$ 12.16 - 54.66 - 42.5 $	$85.12 = 7 \times 12.16$
-45	18	47.5	855.0	$ 7.16 - 54.66 - 47.5 $	$128.88 = 18 \times 7.16$
-50	40	52.5	2200	$ 2.16 - 54.66 - 52.5 $	$86.4 = 40 \times 2.16$
-55	20	57.5	1151	$ 2.84 - 54.66 - 57.5 $	$56.8 = 20 \times 2.84$
-60	10	62.5	625	$ 7.84 - 54.66 - 62.5 $	$78.4 = 10 \times 7.84$
-65	5	67.5	337.5	$ 12.84 - 54.66 - 67.5 $	$64.2 = 5 \times 12.84$
المجموع	100		5466		499.8

جدول (3 - 4)

$$\text{نجد } \bar{s} \text{ من العلاقة} \quad \frac{\sum_{i=1}^n s_i \times k_i}{\sum_{i=1}^n k_i} = \bar{s}$$

$$54.66 = \frac{5466}{100} =$$

- نجد الانحراف المتوسط من العلاقة

$$\text{نجد } \bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{s}| \times k_i}{\sum_{i=1}^n k_i} = \frac{499.8}{100} = 4.998$$

2-3 الانحراف المعياري.

تعريف الانحراف المعياري : هو الجذر التربيعي لمجموع مربعات الانحرافات عن وسطها الحسابي مقسوماً على حجم العينة.

ولايجاد الانحراف المعياري هناك حالتان

أ- اذا كانت البيانات غير مبوبة:

تتبع الخطوات التالية.

- نجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات من العلاقة.

$$\bar{s} = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}$$

- نجد انحرافات القيم عن الوسط الحسابي أي .

$$ح_1 = s_1 - \bar{s}$$

$$ح_2 = s_2 - \bar{s}$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$ح_n = s_n - \bar{s}$$

- نجد مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي أي.

$$c_1^2, c_2^2, \dots, c_n^2$$

- نجد الانحراف المعياري عن طريق العلاقة التالية.

(14-3)
$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n c_i^2}{n}}$$

حيث s تدل على الانحراف المعياري

إذا كان حجم العينة صغيراً فإن

(15-3).....
$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n c_i^2}{1 - n}}$$

إذا كان حجم العينة كبيراً ويقترّب من حجم المجتمع فإن

(16-3).....
$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n c_i^2}{n}}$$

إذا كان حجم العينة مساوياً لحجم المجتمع الصغير.

(17-3).....
$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n c_i^2}{1 - n}}$$

إذا كان حجم العينة مساوياً لحجم المجتمع الكبير

والمقصود بحجم العينة أو المجتمع صغيراً إذا كانت $n \geq 30$ ويكون كبيراً إذا كانت

$$n \leq 30.$$

ملاحظة : إذا أخذنا مربع كلا الطرفين فإننا نحصل على مقياس آخر يسمى التباين ولكن غالبا ما يستعمل هو الانحراف المعياري.

مثال (3-5): أوجد الانحراف المعياري لقيم المشاهدات التالية 3، 7، 11، 14، 5.

الحل: لإيجاد الانحراف المعياري نتبع الخطوات التالية :

$$- \text{ نجد } \bar{x} = \frac{5+14+11+7+3}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

- نجد الانحرافات ومربعاتها عن الوسط

$$x_1 = 5 - \bar{x} = 5 - 8 = -3 \quad , \quad x_1^2 = 9$$

$$x_2 = 7 - \bar{x} = 7 - 8 = -1 \quad , \quad x_2^2 = 1$$

$$x_3 = 11 - \bar{x} = 11 - 8 = 3 \quad , \quad x_3^2 = 9$$

$$x_4 = 14 - \bar{x} = 14 - 8 = 6 \quad , \quad x_4^2 = 36$$

$$x_5 = 3 - \bar{x} = 3 - 8 = -5 \quad , \quad x_5^2 = 25$$

- نجد الانحراف المعياري من العلاقة.

$$s = \sqrt{\frac{9+36+9+1+25}{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} \text{ وعليه}$$

فيكون $s = 4$. أي أن الانحراف المعياري = 4

ب) إذا كانت البيانات المعطاة مبوبة:

هناك عدة طرق لإيجاد الانحراف المعياري نذكر أهمها:

1) الطريقة المطولة

وفي هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية :

- نجد مراكز الفئات للبيانات المبوبة.

- نجد الوسط الحسابي لهذه البيانات من العلاقة

$$\frac{\sum_{i=1}^n \text{مكرر} \times \text{كرد}}{\sum_{i=1}^n \text{كرد}} = \overline{\text{مكرر}}$$

نجد الانحرافات لقيم المشاهدات عن وسطها الحسابي

$$\begin{aligned} \overline{\text{مكرر}} - 1 \text{ مكرر} &= 1 \text{ ح} \\ \overline{\text{مكرر}} - 2 \text{ مكرر} &= 2 \text{ ح} \\ &\vdots \\ \overline{\text{مكرر}} - \text{مكرر} &= \text{مكرر} \text{ ح} \end{aligned}$$

- نجد مربعات الانحرافات

$$= \text{ح}^2 \text{مكرر} = \text{ح}^2 (\text{مكرر} - 1 \text{ مكرر})^2, \text{ح}^2 (\text{مكرر} - 2 \text{ مكرر})^2, \dots, \text{ح}^2 (\text{مكرر} - \text{مكرر})^2$$

- نجد حاصل ضرب كل انحراف بالتكرار له أي نجد

$$\text{ح}^2 \text{مكرر}_1, \text{ح}^2 \text{مكرر}_2, \dots, \text{ح}^2 \text{مكرر}_n$$

- نجد الانحراف المعياري من العلاقة

.....(18-3)

$$\sqrt{\frac{\text{ح}^2 \text{مكرر}_1 + \text{ح}^2 \text{مكرر}_2 + \dots + \text{ح}^2 \text{مكرر}_n}{\sum_{i=1}^n \text{كرد}}} = \text{ع}$$

أو

$$\sqrt{\frac{(\text{مكرر} - 1 \text{ مكرر})^2 + (\text{مكرر} - 2 \text{ مكرر})^2 + \dots + (\text{مكرر} - \text{مكرر})^2}{\sum_{i=1}^n \text{كرد}}} = \text{ع} \quad (19-3) \dots$$

ثم نقسم $\sum_{i=1}^n \text{كرد}$ اذا كان حجم العينة صغيراً، $\sum_{i=1}^n \text{كرد} - 1$ اذا كان حجم العينة كبيراً

مثال (3-6): البيانات التالية تمثل رواتب مئة موظف في إحدى الشركات مبوبة كما في الجدول (3-7).

فئات الرواتب	79-70	89-80	99-90	109-100	119-110	129-120	139-130	المجموع
عدد الموظفين	5	7	21	33	18	13	3	100

جدول (3-7)

والمطلوب إيجاد التباين وكذلك الانحراف المعياري لهذه المشاهدات
الحل: نكون الجدول (3-8) والمحتوي على كافة البيانات اللازمة للحل

فئات الرواتب	التكرار	مركز الفئات	م.ر.ك	$\Sigma x = \Sigma m \cdot \bar{x}$	Σx^2	Σx^2
79-70	5	74.5	372.5	$30.3 = 104.8 - 74.5$	918.09	4590.45
89-80	7	84.5	591.5	$20.3 = 84.5 - 74.5$	412.09	2884.63
99-90	21	94.5	1984.5	$10.3 = 94.5 - 84.5$	106.09	2227.89
109-100	33	104.5	3448.5	$0.3 = 104.5 - 94.5$	0.09	0002.97
119-110	18	114.5	2061.0	$9.7 = 114.5 - 104.5$	94.09	1693.62
129-120	13	124.5	1618.5	$19.7 = 124.5 - 104.5$	388.09	5045.17
139-130	3	134.5	403.5	$29.7 = 134.5 - 104.5$	882.09	2646.27
	100		10480			19091.0

جدول (3-8)

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{10480}{100} = 104.8$$

نجد المتوسط الحسابي \bar{x}

نجد التباين من العلاقة

$$\frac{19091}{99} = \frac{19091}{1-100} = \frac{\sum_{r=1}^n (m_r - \bar{m})^2 \cdot k_r}{\sum_{r=1}^n k_r} = \sigma^2$$

$$\sigma^2 \approx 192.84$$

فيكون الانحراف المعياري بهذه الطريقة .

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{192.84}$$

$$= 13.89$$

(2) إيجاد الانحراف المعياري باستخدام الانحرافات البسيطة عن الوسط الفرضي.

لإيجاد الانحراف المعياري باستخدام الانحرافات عن الوسط الفرضي نتبع الخطوات التالية :

- نجد مراكز الفئات m_r

- نأخذ احد مراكز الفئات الموجودة سابقاً كوسط فرضي وليكن (أ) غالباً ما يكون مركز الفئة المقابل للأكثر تكراراً.

- نجد $\bar{m} = m_r - أ$

- نجد $\sum k_r \times \bar{m}$ ثم نجد $\sum k_r \times \bar{m}^2$

- نجد مربع \bar{m}

- نجد مجموع حاصل ضرب $\sum k_r \times \bar{m}^2$ أي $\sum k_r \times \bar{m}^2$

- نجد الانحراف المعياري من العلاقة.

$$(20-3) \dots\dots\dots \sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum_{j=1}^n x_j^2 \times ك_r}{\sum_{j=1}^n ك_r} - \left(\frac{\sum_{j=1}^n x_j \times ك_r}{\sum_{j=1}^n ك_r} \right)^2 \right)}$$

هذا اذا كان مجموع التكرارات اقل من او يساوي 30 مفردة يكون الانحراف المعياري اكثر دقة.

3- إيجاد الانحراف المعياري باستخدام الانحرافات البسيطة المختصرة عن الوسط الفرضي.
لإيجاد الانحراف المعياري تتبع الخطوات التالية :

- نجد مراكز الفئات سر.
- نجد الوسط الفرضي \bar{x} أحد مراكز الفئات.
- نجد الانحرافات عن الوسط الفرضي من العلاقة $ح = ر - \bar{x}$

$$(21-3) \dots\dots\dots - \text{نجد الانحرافات المختصرة } ح = \frac{\text{الانحرافات البسيطة}}{\text{طول الفئة}}$$

- نجد مجموع حاصل ضرب الانحرافات المختصرة \times التكرارات
- نربع الانحرافات المختصرة ثم نجد مجموع حاصل ضرب مربع الانحرافات المختصرة \times التكرارات أي

$$\sum ح^2 \times ك_r$$

- نجد الانحراف المعياري من العلاقة التالية:

$$(22-3) \dots\dots\dots \sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum_{j=1}^n ح_j^2 \times ك_r}{\sum_{j=1}^n ك_r} - \left(\frac{\sum_{j=1}^n ح_j \times ك_r}{\sum_{j=1}^n ك_r} \right)^2 \right)}$$

مثال (3-7): البيانات التالية تمثل علامات 100 طالب من 50 موزعة بالجدول (3-9).

فئات الدرجات	صفر -	-10	-20	-30	-40	المجموع
عدد الطلاب	2	5	27	47	19	100

جدول (3-9)

المطلوب إيجاد

- (1) الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات البسيطة عن الوسط الفرضي.
- (2) الانحراف المعياري عن طريق الانحرافات المختصرة عن الوسط الفرضي.

الحل: نكون جدول يشمل البيانات المطلوبة وهو جدول (3-10)

فئات العلامات	التكرار ك	مركز الفئات سم	\bar{x}	\bar{x}^2	$\bar{x} \cdot K$	$\bar{x}^2 \cdot K$	\bar{x}	\bar{x}^2	$\bar{x} \cdot K$	$\bar{x}^2 \cdot K$
صفر -	2	5	-20	400	40-	800	2-	4-	4	8
-10	5	15	10-	100	50-	500	1-	5-	1	5
-20	27	25	∴	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
-30	47	35	10	100	470	4700	1	47	1	47
-40	19	45	20	400	380	7600	2	38	4	76
المجموع	100					760		76		136

جدول (3-10)

- 1- نبدأ بحل المطلوب الاول.
- نحدد الوسط الفرضي وليكن $A = 25$ أحد مراكز الفئات.
- نجد انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي.
- نجد مربع الانحرافات عن الوسط الفرضي.

- نجد مجموع حاصل ضرب مربع الانحرافات في التكرارات = 13600

- نجد مجموع حاصل ضرب الانحرافات في التكرارات = 760

نجد الانحراف المعياري من العلاقة:

$$\sqrt{\frac{2\left(\frac{760}{99}\right) - \frac{13600}{99}}{}} = \epsilon$$

$$8.86 = \sqrt{78.47} = \sqrt{58.9 - 137.37} =$$

(2) الحل بطريقة الانحرافات المختصرة.

- تتبع الخطوات السابقة حتى إيجاد الانحرافات.

- نجد الانحرافات المختصرة من العلاقة.

$$x_r = \frac{c}{l} \text{ حيث } l : \text{ طول الفئة.}$$

- نجد x_r^2 .

- نجد حاصل ضرب x_r كثر = 76

- نجد مجموع حاصل ضرب x_r^2 كثر = 136

- نجد الانحراف المعياري.

$$\epsilon = \sqrt{\frac{2\left(\frac{76}{99}\right) - \frac{136}{99}}{}} \cdot l$$

$$0.78 \sqrt{10} = \sqrt{0.59 - 1.37} \sqrt{10} =$$

$$8.83 = 0.883 \times 10 =$$

نلاحظ ان النتيجةين متشابهتين في القيمة.

3-3-3: أثر التحويلات الخطية على التباين والانحراف المعياري

نظرية: اذا اخضع الانحراف المعياري ع، التباين ع² للتحويل الخطي ق(س) = أس + ب فان الانحراف المعياري والتباين يتأثران بهذا التحويل ويصبح كل منهما كما في العلاقتين.

$$\text{عمر} = 11 \cdot \text{ع.س} \quad \dots\dots\dots (3-25)$$

حيث ع ص قيمة الانحراف المعياري بعد التأثير.

$$\text{ع}^2 = 21 \cdot \text{ع.س}^2 \quad \dots\dots\dots (3-26)$$

حيث ع² ص: قيمة التباين بعد التأثير

مثال (3-8): اذا كان الانحراف المعياري لقيم المشاهدات = 4 وتباينها 16 خضعت لتحويل خطي حسب المعادلة.

$$\text{ص} = 0.3 \text{ س} + 7$$

المطلوب: حساب الانحراف المعياري والتباين بعد التعديل

الحل: نجد الانحراف المعياري من العلاقة

$$\text{ع ص} = 11 \cdot \text{ع.س}$$

$$8.2 = 7 + 1.2 = 7 + 4 \times 0.23 =$$

التباين بعد التعديل حسب العلاقة التالية

$$\text{ع}^2 \text{ ص} = 21 \times (0.7) =$$

$$= 0.49 \times 16 =$$

$$= 7.84$$

هناك طرق اخرى لاجداد الانحراف المعياري لقيم المشاهدات غير المبوبة

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum \text{من}^2}{n} - \left(\frac{\sum \text{من}}{n}\right)^2} \quad \text{.....(3-29)}$$

مثال (3-9): أوجد الانحراف المعياري لقيم المشاهدات التالية

8، 12، 10، 5، 15

الحل: نكون جدول الحل (3 - 11)

من	من ²
8	64
12	144
10	100
5	25
15	225
50	558

جدول (3 - 11)

$$\sigma^2 = \frac{558}{5} - \left(\frac{50}{5}\right)^2 = 111.6 - 100 = 11.6$$

∴ الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{11.6} = 3.41$

مثال (3-11): البيانات التالية تمثل الاجر الاسبوعي لمائة عامل مبينة كما يلي:

الفئة	-20	-40	-60	-80	100-120
التكرار	8	12	45	20	15

الحل: نكون جدول الحل (3-12)

[illegible]

جدول (3 - 12)

الطريقة الأولى : الانحرافات البسيطة عن الوسط الحسابي.

نجد أولاً:

$$74.4 = \frac{7440}{100} = \text{مس}$$

القابلين $476.64 = \frac{47664}{100} = 2\%$

$$E = \sqrt{476.64} = 21.83 \text{ الانحراف المعياري}$$

طريقة ثانية: باستخدام العلاقة $\sum_{\substack{ك \\ ك \neq د}}^2 \frac{1}{ك} = 2 - \sum_{ك=1}^2 \frac{1}{ك}$

$$\text{التباين } 476.64 = 5535.36 - 6012 = \left(\frac{7440}{100} \right) - \frac{601200}{100} = \epsilon^2$$

$$ع = 21.83 = \frac{\sum_{ك} \frac{\sum_{ر} م_{ك ر}^2}{ك}}{\sum_{ك} \frac{\sum_{ر} م_{ك ر}^2}{ك}} = 21.83$$

طريقة ثالثة : باستخدام العلاقة

$$476.64 = 19.36 - 496 = \left(\frac{440}{100} \right)^2 - \frac{49600}{100} = 21.83$$

الانحراف المعياري ع = $\sqrt{476.64}$

$$21.83 =$$

3-4 التباين التجميعي (Pooled Variance) والانحراف التجميعي

لو أخذنا من مجتمعات عددها (ن) عينات ذوات الحجوم (ن₁، ن₂،، ن_ك) ومن هذه العينات حسبنا (م₁، م₂،، م_ك) و (ع₁²، ع₂²،، ع_ك²) فان متوسط متوسطات العينات المرجحة بحجم العينة:

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{ك=1}^K \frac{ن_{ك} \cdot م_{ك}^2}{ن_{ك}}}{\sum_{ك=1}^K \frac{ن_{ك}}{ن_{ك}}} = \mu \\ & \frac{ن_1 م_1^2 + ن_2 م_2^2 + \dots + ن_ك م_ك^2}{ن_1 + ن_2 + \dots + ن_ك} = \mu \end{aligned}$$

حيث : ن_ك م_ك : مجموع القيم.

ن_ك : عدد القيم

ومنه فإن:-

$$\begin{aligned} (32-3) \dots\dots\dots & \sqrt{\frac{\sum (\mu - \bar{x}_r)^2 n_r + \sum (1 - n_r) \bar{x}_r^2}{\sum (1 - n_r)}} = \sigma_{ع} \\ (33-3) \dots\dots\dots & \sqrt{\frac{\sum (\mu - \bar{x}_r)^2 n_r + \sum (1 - n_r) \bar{x}_r^2}{\sum (1 - n_r)}} = \sigma \end{aligned}$$

حيث ك يمثل عدد العينات.

مثال (12-3) : اذا كانت لدينا العينات التالية كما في جدول (13-3):-

III	II	I	
200	300	100	ن
60	55	65	\bar{x}
64	81	49	\bar{x}^2

جدول (13-3)

- المطلوب :
- (1) إيجاد الوسط التجميعي μ .
 - (2) الانحراف المعياري التجميعي.
- الحل : بتطبيق العلاقة أعلاه.

$$\frac{\sum_{i=1}^n n_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^n n_i} = \mu$$

$$58.3 = \frac{35000}{600} = \frac{200 \times 60 + 300 \times 55 + 100 \times 65}{600} =$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^J (n_j - \bar{n})^2}{\sum_{j=1}^J (n_j)}} =$$

$$= \frac{6422.2 + 3333.3 + 4444.4 + (199)(64) + (81)(299) + (99)49}{3 - 600}$$

$$93.81 = \sqrt{\frac{56006}{597}} \quad 9.69 \text{ أما التباين التجميعي فهو } 93.81$$

.....(34-3)

عدد درجات الحرية = عدد القيم المستقلة = $n-1$

\bar{n} يحدد قيمة واحدة من القيم ، والقيم الباقية تكون مستقلة.

الوحدة الرابعة

العزوم والتفرطح والالتواء

4-1 : العزوم :

وإستخدم العلماء مبدأ العزوم (Momenis) للاستدلال على الالتواء، والعزم درجات، مما يقودنا لتعريف العزم بالواوي بالعلاقة:

$$M_r = \sum (M_r - 1) d^r (M_r) \quad (4-1) \dots \dots \dots$$

ويسمى (م_ر) بالعزم الواوي حول الثابت (أ) وقد يكون هذا الثابت:-

1) أ = صفرا. وتسمى بذلك العزوم حول الصفر ويرمز لها بالرمز (م_ر). فإذا كانت

$$M_1 = \sum M_r d^r (M_r) = \bar{M} \quad (4-2) \dots \dots \dots$$

$$\bar{M} = \sum M_r d^r (M_r)$$

$$M_2 = \sum M_r d^2 (M_r) = \bar{M} \quad (4-3) \dots \dots \dots$$

$$M_3 = \sum M_r d^3 (M_r) = \bar{M} \quad (4-4) \dots \dots \dots$$

$$M_3 = \sum M_r d^3 (M_r) = \bar{M}$$

$$M_3 = \sum M_r d^3 (M_r) = \bar{M} \quad (4-4) \dots \dots \dots$$

$$و=4 \leftarrow \sum_{\text{م}}^4 (\text{م}_\text{ر}) = 4' \text{م}$$

(5-4).....

$$\sum_{\text{م}}^4 (\text{م}_\text{ر}) = 4' \text{م}$$

(2) أما إذا كان الثابت أ هو الوسط الحسابي نسمي ذلك العزوم حول الوسط الحسابي ويرمز لها بالرمز (م). وتصبح العلاقة:

(6-4).....

$$\sum_{\text{م}}^1 (\text{م}_\text{ر} - \bar{\text{م}}) (\text{م}_\text{ر}) = 1' \text{م}$$

$$و=1 \leftarrow \sum_{\text{م}}^1 (\text{م}_\text{ر} - \bar{\text{م}}) (\text{م}_\text{ر}) = \text{صفر}$$

(7-4).....

$$\sum_{\text{م}}^2 (\text{م}_\text{ر} - \bar{\text{م}}) (\text{م}_\text{ر}) = 2' \text{م}$$

$$و=2 \leftarrow \sum_{\text{م}}^2 (\text{م}_\text{ر} - \bar{\text{م}}) (\text{م}_\text{ر})^2 = 2' \text{م}$$

(8-4).....

$$\sum_{\text{م}}^3 (\text{م}_\text{ر} - \bar{\text{م}}) (\text{م}_\text{ر})^2 = 3' \text{م}$$

$$و=3 \leftarrow \sum_{\text{م}}^3 (\text{م}_\text{ر} - \bar{\text{م}}) (\text{م}_\text{ر})^3 = 3' \text{م}$$

(9-4).....

$$\sum_{\text{م}}^4 (\text{م}_\text{ر} - \bar{\text{م}}) (\text{م}_\text{ر})^3 = 4' \text{م}$$

$$و=4 \leftarrow \sum_{\text{م}}^4 (\text{م}_\text{ر} - \bar{\text{م}}) (\text{م}_\text{ر})^4 = 4' \text{م}$$

(10-4).....

$$\sum_{\text{م}}^4 (\text{م}_\text{ر} - \bar{\text{م}}) (\text{م}_\text{ر})^4 = 4' \text{م}$$

وتستخدم هذه العزوم للتعبير عن (م)، (ت)، ع².

وبذلك فاننا نستطيع التعبير عن المعادلة السابقة ع² = ت² - م² بدلالة العزوم

حيث أن: ع² = 2'م، ت² = 2'م، م² = 1'م، وبالتعويض في العلاقة نحصل على:

$$ع^2 = 2' \text{م} - 1' \text{م} \text{ أو}$$

(11-4).....

$$2' \text{م} - 1' \text{م} = 2' \text{م}$$

ويمكننا أيضا إيجاد قيمة (3م) بنفس الطريقة:

$$\begin{aligned}
 {}^3(\overline{m-}) \supseteq \frac{1}{n} = {}^3m \\
 ({}^3\overline{m-} - {}^2\overline{m-} + {}^2\overline{m-} + {}^3\overline{m-} - {}^3\overline{m-}) \supseteq \frac{1}{n} = \\
 [{}^3\overline{m-} - ({}^2\overline{m-})^2 + ({}^2\overline{m-})^3 - {}^3\overline{m-} \supseteq \frac{1}{n} = \\
 \left[({}^3\overline{m-})_n - ({}^2\overline{m-}) \left(\frac{({}^2\overline{m-})}{n} \right) + ({}^2\overline{m-}) \left(\frac{({}^2\overline{m-})}{n} \right) - {}^3\overline{m-} \supseteq \frac{1}{n} = \right. \\
 \left. {}^3\left(\frac{({}^2\overline{m-})}{n} \right) - {}^3\left(\frac{({}^2\overline{m-})}{n} \right) + \left(\frac{({}^2\overline{m-})}{n} \right) \left(\frac{({}^2\overline{m-})}{n} \right) - {}^3\overline{m-} \supseteq \frac{1}{n} = \right. \\
 (12-4)..... \boxed{{}^3\overline{m-}^2 + {}^2\overline{m-} \times {}^3\overline{m-} - {}^3\overline{m-} = {}^3m}
 \end{aligned}$$

ويمكننا أيضا إيجاد (4م) ونفس الطريقة

$$\begin{aligned}
 {}^4(\overline{m-}) \supseteq \frac{1}{n} = {}^4m \\
 ({}^4\overline{m-} - {}^3\overline{m-} + {}^2\overline{m-} + {}^3\overline{m-} - {}^3\overline{m-} + {}^4\overline{m-} - {}^4\overline{m-}) \supseteq \frac{1}{n} = \\
 [{}^4\overline{m-} + ({}^3\overline{m-})^3 - ({}^2\overline{m-})^2 + ({}^3\overline{m-})^2 - {}^4\overline{m-} - ({}^2\overline{m-})^2 \supseteq \frac{1}{n} = \\
 \left[({}^4\overline{m-})_n + ({}^3\overline{m-}) \left(\frac{({}^3\overline{m-})}{n} \right) - ({}^2\overline{m-})^2 \left(\frac{({}^2\overline{m-})}{n} \right) + ({}^3\overline{m-}) \left(\frac{({}^3\overline{m-})}{n} \right) - {}^4\overline{m-} \supseteq \frac{1}{n} = \right. \\
 \left. \left(\frac{({}^4\overline{m-})}{n} \right) + \left(\frac{({}^3\overline{m-})}{n} \right) - \left(\frac{({}^2\overline{m-})}{n} \right)^2 \left(\frac{({}^2\overline{m-})}{n} \right) + \left(\frac{({}^3\overline{m-})}{n} \right) \left(\frac{({}^3\overline{m-})}{n} \right) - {}^4\overline{m-} \supseteq \frac{1}{n} = \right.
 \end{aligned}$$

(13-4)

$$4\hat{m}_1^4 - 3\hat{m}_1^2 \hat{m}_2^2 + 6\hat{m}_1^2 \hat{m}_3 + 4\hat{m}_1^2 \hat{m}_4$$

(14-4)

$$4\hat{m}_1^4 - 3\hat{m}_1^2 \hat{m}_2^2 + 6\hat{m}_1^2 \hat{m}_3 + 4\hat{m}_1^2 \hat{m}_4 = 4\hat{m}_1^4$$

وقد خلص العلماء من خلال ابحاث كثير في العزوم الى إيجاد معامل سمي بمعامل التفرطح والذي سنرمز له بالرمز α_2 .

4-2 معامل التفرطح:

يمكن قياس تفرطح منحنى معين من خلال معامل سمي بمعامل التفرطح والذي يمكن إيجاده من خلال العلاقة التالية:

(15-4)

$$\frac{4\hat{p}_2}{2\hat{p}_1} = \alpha_2$$

فاذا كان:-

$$3 = (\alpha_2) \Leftrightarrow \text{المنحنى معتدل التفرطح}$$

$$3 > (\alpha_2) \Leftrightarrow \text{المنحنى مفرطح}$$

$$3 < (\alpha_2) \Leftrightarrow \text{المنحنى مدبب}$$

وكمثال على اتفرطح فإن التوزيع الطبيعي له منحنى معتدل التفرطح لأن $3 = \alpha_2$

4-3 الالتواء (SKEWNESS)

تعريف: وهو انثناء التماثل، ومن الناحية الاحصائية هو عدم وجود تماثل، ويمكن قياسها عن طريق (س⁻، و، م).

حيث :-

$$\text{م} - \text{م} > 0 \therefore \text{الالتواء سالب.}$$

$$\text{م} - \text{م} < 0 \therefore \text{الالتواء موجب.}$$

ومقياس الالتواء هذا يسمى معامل الالتواء وهو قيمة نسبية غير متأثرة بوحدات القياس.

ويمكن حساب معامل الالتواء عن طريق:-

(1) الوسط الحسابي (م) والوسيط (و) والمتوال (م)

يعطينا معامل بيرسون الأول .

(16-4).....

$$\frac{\bar{m} - \bar{w}}{c} = {}_1\alpha$$

(17-4).....

$$\frac{(\bar{m} - \bar{w})^3}{c} = {}_1\alpha$$

(18-4).....

$$\frac{(\bar{m} - \bar{w})^3}{c^2} = {}_1\alpha$$

وهذه صور مختلفة من معامل بيرسون الأول

(2) باستخدام الربيعات (ر1) ، (ر2) ، (ر3)

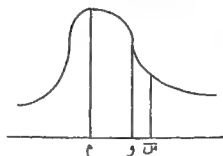
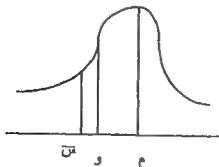
يعطينا معامل بيرسون الثاني

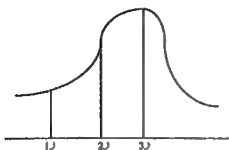
(19-4)

$$\frac{(r_1 - r_2) - (r_2 - r_3)}{r_1 - r_3} = {}_2\alpha$$

(20-4)

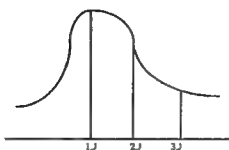
$$\frac{r_1 + 2r_2 - 3r_3}{r_1 - r_3} = {}_2\alpha$$





$$2J-2J > 2J-3J$$

الالتواء سالب.



$$2J-2J < 2J-3J$$

الالتواء موجب.

مثال (1-4): جد معامل الالتواء بطريقة المختلفة لفئات الأجر التالية:

فئات الأجر	-40	-60	-80	-100	-120	المجموع
ت	8	12	20	8	2	50

علماً بأن:

$$\bar{x} = 83.6, s = 85, m = 88, r_1 = 67.5, r_2 = 85, r_3 = 97.5, \bar{y} = 20.95$$

$$0.21 = \frac{88 - 83.6}{20.95} = \frac{m - \bar{x}}{s} = \alpha_1$$

$$0.21 = \frac{(85 - 83.6)^3}{20.95} = \frac{(\bar{y} - \bar{x})^3}{s} = \alpha_1$$

$$0.22 = \frac{(88 - 85)^3}{(20.95)^2} = \frac{(m - \bar{y})^3}{s^2} = \alpha_1$$

$$0.2 = \frac{170 - 165}{30} = \frac{67.5 + (85)^2 - 97.5}{67.5 - 97.5} = \frac{r_1 + 2r_2 - r_3}{r_1 - r_3} = \alpha_2$$

حيث يأخذ α_1 إشارة (م) فإذا كانت :-

$\alpha_1 = 0$: التوزيع متماثل

(α) > $\therefore \Leftarrow$ الائواء سالب

(α) < $\therefore \Leftarrow$ الائواء موجب

حيث α ترمز الى معامل الائواء

هناك طريقة أخرى لإيجاد معامل الائواء نخلص إليها العلماء باستخدام العزوم بأن أوجدوا معامل التواء α من العلاقة:

$$\frac{3^2 P}{2^3 P} = \alpha \quad (21-4) \dots\dots\dots$$

والآن نورد مثالا شاملاً لذلك.

مثال (2-4): البيانات التالية تمثل فئات الاجر الاسبوعي لـ 50 عامل مبنية كما يلي:

فئات الاجر	-40	-60	-80	-100	140-120
التكرار	8	12	20	8	2

المطلوب : (1) إيجاد العزم الاول والثاني والثالث والرابع حول \bar{x}

(2) إيجاد العزم الاول والثاني والثالث والرابع حول الصفر

(3) معامل التفرطح ونوعه.

(4) معامل الائواء ونوعه.

الحل: نكون جدول الحل التالي.

الفئات	لتر	س	س ²	س ³	س ⁴
-40	8	50	2500	125000	6250000
-60	12	70	4900	343000	24010000
-80	20	90	8100	729000	65610000
-100	8	110	12100	1331000	146410000
-120	2	130	16900	2197000	285610000
المجموع	50				

فئات	كـ	مـ	مـ كـ ²	مـ كـ ³	مـ كـ ⁴	فئات
-40	8	50	400	20000	1000000	50000000
-60	12	70	840	58800	4116000	288120000
-80	20	90	1800	162000	14580000	1312200000
-100	8	110	880	96800	10648000	1171280000
-120	2	130	260	33800	4394000	571220000
المجموع	50	-	4180	371400	34738000	3392820000

حـ	حـ كـ	حـ كـ ²	حـ كـ ³	حـ كـ ⁴	حـ	حـ كـ
40-	320-	12800	512000-	20840000	2-	16-
20-	240-	4800	96000-	1920000	1-	12-
0	0	0	0	0	0	0
20	160	3200	64000	1280000	1	8
40	80	3200	128000	5120000	2	4
	320-	24000	416000	29160000	/	16-

حـ كـ ²	حـ كـ ³	حـ كـ ⁴	(مـ-مـ) كـ ²	(مـ-مـ) كـ ³	(مـ-مـ) كـ ⁴
32	64	128	-268.8	9031.68	10196405.45
12	12-	12	-163.2	.2219	410522.4192
0	0	0	128	819.2	33554.432
8	8	8	211.2	5575.68	3886025.933
8	16	32	212.8	4305.92	9270473.523
60	52-	180		21952	23796981.76

$$83.6 = \frac{4180}{50} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sum_{k=1}^n} \quad (1)$$

$$7428 = \frac{371400}{50} = \sum_{j=2}^m \frac{1}{\sum_{k=1}^n} \quad (2)$$

$$69476 = \frac{34738000}{50} = \sum_{j=3}^m \frac{1}{\sum_{k=1}^n} \quad (3)$$

$$67856400 = \frac{3392820000}{50} = \sum_{j=4}^m \frac{1}{\sum_{k=1}^n} \quad (4)$$

$$83.6 = 90 + \frac{320-}{50} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sum_{k=1}^n} \quad (5)$$

$$480 = \frac{204000}{50} = \sum_{j=2}^m \frac{1}{\sum_{k=1}^n} \quad (6)$$

$$8320 = \frac{416000-}{50} = \sum_{j=3}^m \frac{1}{\sum_{k=1}^n} \quad (7)$$

$$583200 = \frac{29160000}{50} = \sum_{j=4}^m \frac{1}{\sum_{k=1}^n} \quad (8)$$

العزوم حول نقطة الأصل:

$$.32 = \frac{16-}{50} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sum_{k=1}^n} \quad (9)$$

$$12 = \frac{60}{50} = \sum_{j=2}^m \frac{1}{\sum_{k=1}^n} \quad (10)$$

$$104 = \frac{52-}{50} = \sum_{j=3}^m \frac{1}{\sum_{k=1}^n} \quad (11)$$

$$3.6 = \frac{180}{50} = \sum_{j=4}^m \frac{1}{\sum_{k=1}^n} \quad (12)$$

العزوم حول الوسط الحسابي:

$$\therefore =_r \left(\overline{m} - m \right) \geq \frac{1}{\sum_k} =_1 \alpha \quad (13)$$

$$439.04 = \frac{21952}{50} =_r \left(\overline{m} - m \right)^2 \geq \frac{1}{\sum_k} =_2 \alpha \quad (14)$$

$$13717.7088 = \frac{685885.44}{50} =_r \left(\overline{m} - m \right)^3 \geq \frac{1}{\sum_k} =_3 \alpha \quad (15)$$

$$475939.6352 = \frac{23796981.76}{50} =_r \left(\overline{m} - m \right)^4 \geq \frac{1}{\sum_k} =_4 \alpha \quad (16)$$

وعليه فان معامل الالتواء باستخدام العزوم

$$< 0 \quad 2 = \frac{8 \times 18817551}{8462748} = \frac{2(13717.7088)}{3(439.04)} = \frac{\frac{2}{3}\alpha}{\frac{3}{2}\alpha} =_1 \alpha$$

ملتبني نحو اليمين

$$3 > 2.47 = \frac{475939.635}{192756.12} = \frac{475939.635}{2(439.04)} = \frac{\frac{4}{2}\alpha}{\frac{2}{2}\alpha} =_2 \alpha$$

وهذا يعني ان المنحنى مفرطح

الوحدة الخامسة

التوزيع الطبيعي

1-5 : شكل المنحنى الطبيعي وخصائصه

1-1-5 شكل المنحنى الطبيعي

يتخذ المنحنى الطبيعي شكل الجرس ، وهو متماثل حول نقطة الوسط أي ان العمود النازل من اعلى نقطة في المنحنى على المحور الافقي يقسم المنحنى إلى منطقتين متساويتين كما هو موضح بالشكل (1-5) جانبا وهو يمثل التوزيع الطبيعي.

وهو من اهم التوزيعات الاحتمالية ودالته الاحتمالية:

$$ح(س) = \frac{1}{\sigma \sqrt{\pi 2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{s - \mu}{\sigma} \right)^2} \quad (1-5) \dots\dots\dots$$

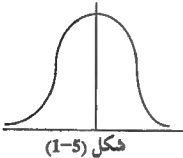
حيث: π النسبة التقريبية = $\frac{22}{7}$ أو 3.14

σ : الانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي

هـ : العدد الثوري = 2.718

μ : الوسط الحسابي للتوزيع

سـ: قيمة الملاحظة



1-2-5 : خصائص التوزيع الطبيعي

(1) شكله يشبه الجرس

(2) متماثل حول الوسط.

(3) الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال لهذا التوزيع

(4) المساحة تحت المنحنى الطبيعي = 1

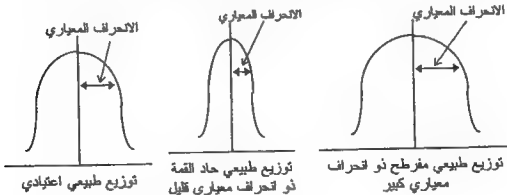
(5) تحديد نسبة أي جزء محصور بين قيمتين تحت المنحنى يتم بمعرفة الوسط والانحراف المعياري للتوزيع.

(6) تقل قيمة σ كلما اتجهت σ نحو ∞ ولكنها لا يمكن ان تصبح صفرا الا في اللانهاية وهذا غير ملموس.

2-5 : التوزيع الطبيعي المعياري :

وحتى يكون التوزيع الطبيعي توزيعا معياريا فيتوجب ان يكون متوسطه الحسابي صفرا وتباينه 1. لذا فان خواص التوزيع الطبيعي المعياري هي نفس خواص التوزيع الطبيعي الاصلي اللهم الا زيادة الشرط الاخير وهو ان يكون وسطه الحسابي = صفرا. وتباينه يساوي 1.

وهناك صور اخرى لمنحنى التوزيع الطبيعي تعتمد على الانحراف المعياري للتوزيع. فكلما زاد الانحراف المعياري معنى ذلك انه الزيادة في تشتت البيانات عن وسطها الحسابي ولذا يزداد تفرطح المنحنى والاشكال التالية توضح هذا المفهوم:



شكل (4-5)

شكل (3-5)

شكل (2-5)

5-2-1 جداول التوزيع الطبيعي المعياري والمساحات :

(1) صممت هذه الجداول لتعمل على تخفيف عناء إيجاد مساحة معينة تحت منحني التوزيع الطبيعي المعياري.

(2) المساهمة في إيجاد احتمال اية مشاهدة من مشاهدات التوزيع الطبيعي غير المعياري وذلك بتحويل قيم المشاهدات الى درجات معيارية من العلاقة.

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{S} \quad (2-5) \dots\dots\dots$$

حيث S قيمة مشاهدة، \bar{X} الوسط الحسابي للعينة، Z : الانحراف المعياري للعينة.

(3) يجب معرفة ان قيم Z للدرجات المعيارية واقعة بين $-4 \leq Z \leq 4$ واية قيمة معيارية تزيد عن هذا الحد فيكون هناك خطأ حسابياً.

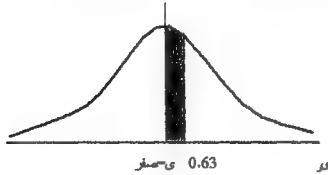
5-2-2 كيفية إيجاد المساحة تحت المنحني باستخدام الجداول :

تتبع الخطوات التالية :

(1) نحول كل قيمة مشاهدة من التوزيع الطبيعي الى قيمة معيارية حسب العلاقة (2-5)
(2) بعد الحصول على القيمة المعيارية نلجأ الى جدول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد القيم المقابلة حيث ان العمود الاول يمثل القيم للمعيارية والافقي يشمل الجزئيات للقيم المعيارية وبعد القراءة الرأسية الى اسفل ثم افقي نجد القيم المناظرة المطلوبة والتي تدل على المساحة، والاحتمال المطلوب حيث أن المساحة هي بمثابة احتمال.

والجدول ادناه يمثل جزءاً من الجدول الكلي ولو اردنا إيجاد القيمة المناظرة لـ $Z=0.63$ نقرأ رقم تقاطع القيمة الرأسية مع الافقية فتكون هي القيمة المناظرة لـ $Z=0.63$ ونلاحظ ان القراءة تشير الى 0.2357 وهذا يشير الى احتمال وقسوع المشاهدة المناظرة لـ Z . وهي تمثل المساحة المشار لها في الشكل التالي ونلاحظ من الشكل (5-5) ان الخط المار بنقطة $Z=0$ صفر يقسم المساحة الكلية الى قسمين متساويين كل منهما 0.5000 وعند حساب مساحة تبدأ بالصفر. وتنتهي بقيمة Z فان المساحة المطلوبة

هي القيمة المأخوذة من الجدول ادناه كما اسلفنا في المثال السابق.



شكل (5-5)

اما اذا تصادف وجود قيمة معيارية سالبة فاننا نأخذ مثلتها الموجبة ونجدها من الجدول باستخدام خاصية التماثل المحوري:
حيث ان الجدول صمم فقط للقيم المعيارية الموجبة. والمساحة المحصورة عادة تحدها معطيات السؤال. والجدول التالي هو نموذج للجدول الطبيعي المعياري.

ي	00	01	0200	03	04	05	06	07	08	09
0,0	0000	0040	0080	0120	0160	0199	0229	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753	
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1197	1217	1255	1293	1321	1368	1406	1443		1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1773	1808	1879	
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157		2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549

5-2-3 : تطبيقات على حساب المساحات أو الاحتمالات :

يمكن اعطاء الأمثلة التالية لتغطي جميع ما ورد من ملاحظات:

مثال (5-1): أوجد الاحتمال لما يلي (مساحة المناطق المحددة بالقيم المعيارية)

أ) ح (ي > 1) ب) ح (ي < 1)

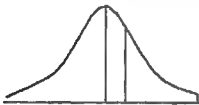
ج) ح ($0 < y < 2.3$) د) ح ($-1.35 < y < 2.38$)

هـ) ح ($1.42 < y < 3.1$)

الحل: نبدأ بحل مثل هذه الأسئلة برسوم توضيحية للمنحنيات لتحديد المساحة المطلوبة ثم إيجادها من الجداول المعطاة

أ) ح ($y > 1$) $= 0.5000 - 0.3413 = 0.1587$

= مساحة نصف المنحنى - المساحة الواقعة تحت $y = 1$ وهنا نأخذ مثيلتها من الجدول المعطى كما في شكل (5-6)



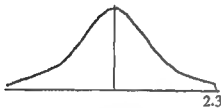
شكل (5-7)



شكل (5-6)

ب) ح ($y < 1$) $= 0.5000 - 0.3413 = 0.1587$

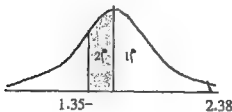
كما في شكل (5-7)



شكل (5-8)

ج) ح ($0 < y < 2.3$) $= 0.4893$

كما في شكل (5-8)



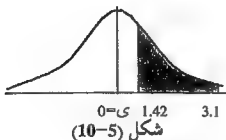
شكل (5-9)

د) ح ($-1.35 < y < 2.38$)

$$= z_1^2 + z_2^2 =$$

$$= 0.4115 + 0.4913 = 0.9028$$

كما في شكل (5-9)



هـ) إذا أوقعت المنطقة المطلوبة في جهة واحدة فتأخذ الفارق بين المساحتين كما في شكل (5-10)، وعليه تصبح المساحة المطلوبة المحددة على النحو:

$$ح (1.42 > y > 3.1) = 0.4990 - 0.4222 = 0.0768$$

مثال (5-2): تقدم عشرون ألف طالب لامتحان عام وكان توزيع علاماتهم قريبا من التوزيع الطبيعي، فإذا كان الوسط الحسابي للعلامات 70 والانحراف المعياري 5، فأوجد :-

- 1) عدد الطلاب الذين تقع علاماتهم بين 70 - 80 درجة
 - 2) عدد الطلاب الذين تقع علاماتهم بين 65 - 75 درجة
 - 3) عدد الطلاب الذين تقل علاماتهم عن 60
 - 4) عدد الطلاب الذين تزيد علاماتهم عن 80
 - 5) عدد الطلاب الذين تزيد علاماتهم عن 60
 - 6) عدد الطلاب الذين تقل علاماتهم عن 80 مع من تزيد او تساوي 80
- الحل: 1) تحول القيمة العادية إلى قيمة معيارية باستخدام العلاقة (5-2)

$$ح \left(\frac{70-80}{5} > y > \frac{70-70}{5} \right)$$

$$= ح \left(0 > y > -2 \right)$$

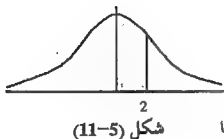
نأخذ هذه القيمة.

$$= 0.4773$$

وعليه فإن عدد الطلاب المطلوب.

$$\text{عدد الطلاب} = 20000 \times 0.4773 = 9546 \text{ طالبا}$$

كما هو موضح في شكل (5-11)



(2) نحول إلى القيمة المعيارية.

$$P\left(\frac{70-65}{5} < Z < \frac{70-75}{5}\right)$$

$$= P(-1 < Z < 1)$$

ولأن القيم المعيارية محصورة بين قيمة

سالبة وموجبة

وعليه فإن المساحة المطلوبة عبارة عن منطقتين

$$P = P_1 + P_2 = 0.3413 + 0.4313$$

$$= 0.6826$$

عدد الطلاب المطلوب = 20000×0.6826

$$= 13652 \text{ طالب}$$

كما هو موضح في شكل (5-12)

$$(3) P\left(Z > \frac{70-60}{5}\right)$$

$$= P(Z > 2)$$

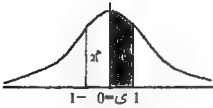
$$= 0.5000 - 0.4773$$

$$= 0.0227$$

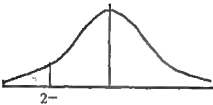
عدد الطلاب المطلوب = 20000×0.0227

$$= 454 \text{ طالبا}$$

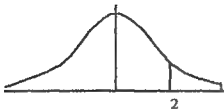
كما هو موضح في شكل (5-13)



شكل (5-12)



شكل (5-13)



شكل (14-5)

$$P(Y < 2) = P\left(Y < \frac{70-80}{5}\right) \quad (4)$$

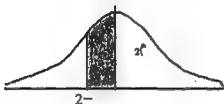
$$= 0.4773 - 0.5000 =$$

$$= 0.0227$$

عدد الطلاب المطلوب = $20000 \times 0.0227 =$

$$= 454 \text{ طالبا}$$

كما هو موضح في شكل (14-5).



شكل (15-5)

$$P(Y < 2) = P\left(Y < \frac{70-60}{5}\right) \quad (5)$$

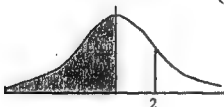
$$= 0.4772 + 0.5000 =$$

$$= 0.9773$$

عدد الطلاب = $20000 \times 0.9773 =$

$$= 1546 \text{ طالبا}$$

كما هو موضح في شكل (15-5).



شكل (16-5)

$$P\left(Y > \frac{70-80}{5}\right) + P\left(Y < \frac{70-80}{5}\right) \quad (6)$$

$$= P(Y < 2) + P(Y > 2)$$

$$= 0.9773 + 0.0227$$

$$= 1.0000$$

كما هو موضح في شكل (16-5).

وحيثاً استخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري التجميعي ولتوضيح هذا الاستخدام

نورد مزيداً من الأمثلة مستخدمين الأسلوب التجميعي.

مثال (5-1): احسب الاحتمالات التالية باستخدام جدول التوزيع الطبيعي التجميعي:

$$(1) \text{ ح } (-1 > \text{ي} > 1) ,$$

$$(2) \text{ ح } (-1.35 < \text{ي} < 2.1)$$

$$(3) \text{ ح } (1.2 < \text{ي} < 3)$$

$$(4) \text{ ح } (\text{ي} < 1.2)$$

$$(5) \text{ ح } (\text{ي} > 2.4)$$

$$(6) \text{ ح } (-2 < \text{ي} < 2)$$

$$\text{الحل: (1) ح } (-1 < \text{ي} < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826$$

$$(2) \text{ ح } (-1.35 < \text{ي} < 2.1) = \Phi(2.1) - \Phi(-1.35) =$$

$$0.9821 - 0.0885 = 0.8936$$

$$(3) \text{ ح } (1.2 < \text{ي} < 3) = \Phi(3) - \Phi(1.2) =$$

$$0.9987 - 0.8849 = 0.1138$$

$$(4) \text{ ح } (\text{ي} < 1.2) = \Phi(1.2) = 0.8849$$

$$1 - 0.8849 = 0.1151$$

$$(5) \text{ ح } (\text{ي} > 2.4) = 1 - \Phi(2.4) = 1 - 0.9936 = 0.0064$$

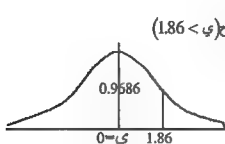
$$(6) \text{ ح } (-2 < \text{ي} < 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) =$$

$$0.9772 - 0.0228 = 0.9544$$

مثال (5-4): إذا علم أن علامات مجموعة من الطلاب في أحد الكليات تخضع

للتوزيع الطبيعي $N(62, 49)$ فإذا اختير شخص ما بطريقة عشوائية ما احتمال انه قد حصل على علامة أكثر من 75.

الحل: $\mu = 62, \sigma^2 = 49, \sigma = 7, \text{مر} = 75$ ثم نحول قيمة المشاهدة إلى قيمة معيارية.



شكل (5-11)

$$P(Y < 1.86) = P\left(Y < \frac{13}{7}\right) = P\left(Y < \frac{62-75}{7}\right)$$

$$P(Y \geq 1.86) = 1 - P(Y < 1.86)$$

$$0.0314 = 0.9686 - 1 =$$

كما هو موضح في شكل (5-17)

مثال (5-5) : احسب الاحتمالات التالية:

$$(1) P(Y < 2) \quad (2) P(1.4 < Y < 2.89) \quad (3) P(Y > 2.81)$$

$$(4) P(1.35 < Y < 1.73) \quad (5) P(0 < Y < 0.97)$$

$$(6) P(Y > 2.1) \quad (7) P(Y > 2.85)$$

الحل:

$$(1) P(Y < 2) = P(Z < 2) - 1 = 0.9772 - 1 = 0.0228$$

$$(2) P(1.4 < Y < 2.89) = P(Z < 2.89) - P(Z < 1.4) = 0.9881 - 0.9192 = 0.0789$$

$$(3) P(Y > 2.81) = 1 - P(Z < 2.81) = 1 - 0.9975 = 0.0025$$

$$(4) P(1.35 < Y < 1.73) = P(Z < 1.73) - P(Z < 1.35) = 0.9582 - 0.0885 = 0.8697$$

$$(5) \quad \text{ح} (0 < \text{ح}) = (0.197) \quad \text{ح} (0.97) - (0) = -$$

$$(6) \quad \text{ح} (ي > 2.1) = (2.1) \quad \text{ح} = 0.9821$$

$$(7) \quad \text{ح} (ي < -2.85) = (-2.85) \quad \text{ح} - 1 = (2.85) \quad \text{ح} - 1 = 0.0022$$

مثال (5-6): إذا كان عمر أحد أنواع البطاريات يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 3

سنوات وانحراف معياري نصف سنة فإذا اختير من هذا الإنتاج بطارية واحدة

عشوائية أوجد ح (س > 2.3 سنة)

$$\text{الحل: } \mu = 3, \sigma = \frac{1}{2}, \text{س} > 2.3$$

$$\text{ح} (ي > \frac{7}{5}) = \text{ح} \left(\frac{3-2.3}{0.5} > ي \right) = \text{ح} \left(\frac{3-2.3}{\frac{1}{2}} > ي \right)$$

$$= - \text{ح} (ي > 1.4) = (1.4) \quad \text{ح} = 0.0808$$

مثال (5-7): إذا علم أن علامات الطلاب في أحد الكليات تتبع التوزيع الطبيعي

حيث $N(14, 8)$ والمطلوب حساب

(1) احتمال العثور على شخص له علامة أقل من 72.

(2) احتمال الحصول على علامة أكثر من 80

(3) احتمال أن تكون له علامة تتراوح بين 60 - 70

(4) إذا منح أعلى 8% من الطلبة على تقدير ممتاز ما هي العلامة التي نقول

الطالب للحصول على هذا التقدير.

(5) إذا اعتبر ما نسبته 12% من الطلبة راسباً ما هي علامة الرسوب.

$$\text{الحل: } \mu = 64, \sigma = 8$$

$$0.8413 = (1) \phi = (1 > y) \pi = \left(\frac{64 - 72}{8} > y \right) \pi \quad (1)$$

$$(2) \phi - 1 = (2 < y) \pi = \left(\frac{64 - 80}{8} < y \right) \pi \quad (2)$$

$$0.0228 = 0.99772 - 1 =$$

$$\left(\frac{64 - 70}{8} \geq y \geq \frac{64 - 60}{8} \right) \pi = (70 \geq y \geq 60) \pi = \quad (3)$$

$$(0.75 \geq y \geq 0.5 -) \pi = \left(\frac{6}{8} \geq y \geq \frac{4}{8} \right) \pi =$$

$$(0.5 -) \phi - (0.75) \phi =$$

$$0.4649 = 0.3085 - 0.7734 =$$

$$\frac{64 - y}{8} = y \quad (4)$$

$$\frac{64 - y}{8} = \frac{1.405}{1}$$

$$11.240 = 64 - y$$

$$11.240 + 64.0 = y$$

$$75.240 =$$

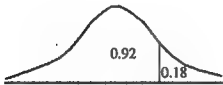
ووضح ذلك في شكل (18-5)

$$\frac{64 - y}{8} = y \quad (5)$$

$$\frac{64 - y}{8} = \frac{1.175 -}{1}$$

$$-9.400 = 64 - y$$

$$64 + 9.4 = y$$



شكل (18-5)



شكل (19-5)

=+54.6 علامة الرسوب

كما هو موضح في شكل (5-19)

مثال (5-8): إذا علم أن للمتغير العشوائي x التوزيع الطبيعي متوسطه $\mu = 50$ ، وتباينه $\sigma^2 = 100$

المطلوب إيجاد احتمال أن هذا المتغير يقع بين 45 < x < 62

الحل: الاحتمال المطلوب $P\left(\frac{50-45}{10} < z < \frac{50-62}{10}\right) = P(-0.5 < z < -1.2)$

$$= \Phi(-1.2) - \Phi(-0.5)$$

$$= 0.8849 - 0.3085 = 0.5764$$

مثال (5-9): إذا علم أن أحد أنواع البطاريات يعمل حتى 3 سنوات بالمتوسط

بانحراف معياري $\frac{1}{2}$ سنة فعلى اعتبار أن لعمر البطارية توزيع معتماد ماهو

احتمال أن يحصل على بطارية تعمر فترة اقل من 2.3 سنة.

الحل: $\mu = 3$ سنة ، $\sigma = 0.5$

$$P(x < 2.3) = P\left(z < \frac{3-2.3}{0.5}\right) = P(z < 1.4)$$

$$= \Phi(1.4) = 0.9192$$

مثال (5-10): إذا علم أن أحد مصانع اللبكات يعمر بالمتوسط 800 ساعة وبانحراف

معياري 40 ساعة إذا اخذت لبة عشوائيا من انتاج هذا المصنع ما احتمال أن

تخترق بين 778 ، 834 ساعة .

الحل: $\mu = 800$ ساعة ، $\sigma = 40$ ساعة

$$P(778 < x < 834) = P\left(\frac{800-778}{40} < z < \frac{800-834}{40}\right)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{34}{40} > \gamma > \frac{22}{40} \right) C = \\ & (0.85 > \gamma > 0.55) C = \\ & (0.55 - 0) - (0.85 - 0) = \\ & 0.5111 = 0.2912 - 0.8023 = \end{aligned}$$

مثال (5-11): إذا كان متوسط العلامات في امتحان ما هو 74 علامة والانحراف المعياري 7 وبناء على صيغة التعبير عن العلامة المطلقة بالتقدير بالحرف قرر المدرس ان يعطي تقدير أ لأعلى 12٪ من الطلبة.
المطلوب: على اعتبار ان للعلامات توزيع الطبيعي حساب اقل علامة تؤهل الطالب للحصول على هذا التقدير

$$\text{الحل: } \mu = 74 \quad \sigma = 7$$

نحسب أولاً القيمة المعيارية من المعطيات

$$Z(\gamma) = 0.88$$

$$\gamma = 1.175$$

$$\gamma = \frac{\mu - x}{\sigma}$$

$$\frac{74 - x}{7} = \frac{1.175}{1}$$

$$x - 74 = 7 \times 1.175 = 8.225$$

$$x = 82.225 = 8.225 + 74$$

الخطوات التي اتبعت للحصول على النتيجة اعلاه:

- نرسم المنحنى لتوضيح المساحة التي يقع ضمنها من سيحصلون على تقدير أ ومن الذين لن يحصلوا على هذا التقدير $1 - 0.12 = 0.88$

- نبحث من خلال الجدول التوزيع الطبيعي المعياري عن القيمة المعيارية المقابلة للمساحة 0.88 فنجد انها تتوسط المساحتين

$$0.8800$$

$$0.8790 \quad 0.8810$$

$$1.17 \quad 1.18 = Y$$

القيمة التي تقابل 0.88 هي:

$$1.175 = \frac{1.17 + 1.18}{2}$$

مثال (5-12): في تقييم نتائج الامتحان لاحد المساقات لعدد من الطلبة بلغ 120 طالبا وجد ان متوسط العلامات 64 والانحراف المعياري 8 فاذا اختير طالب عشوائيا

- (1) ما هو احتمال ان تكون درجته اكبر من 70.
- (2) ما هو احتمال ان تكون درجته بين (55، 80).
- (3) ما هو احتمال ان يكون قد حصل على درجة اقل من 80.
- (4) ما هو احتمال ان يكون قد حصل على درجة على الأكثر 75.
- (5) اذا حدد ما نسبته 8٪ لمنحهم تقدير ممتاز ماهي ادنى درجة توصل الطالب للحصول على هذا التقدير.
- (6) ماهو عدد الطلبة المتوقع لأولئك الحاصلين على علامات اقل من 54.

$$\text{الحل: } \mu = 64, \sigma = 8$$

$$(1) \therefore P(X < 70) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{70 - 64}{8}\right) = P\left(Z < \frac{6}{8}\right) = P(Z < 0.75) = 0.7734 = 0.2266$$

$$= P\left(\frac{64 - 80}{8} < Z < \frac{64 - 55}{8}\right) = P\left(-\frac{9}{8} < Z < \frac{16}{8}\right)$$

$$C(1.125 > Y > 2)$$

$$0.8480 = 0.1292 - 0.9772 = (1.135 -)C - (2)C$$

$$0.9772 = (2)C = (2 > Y)C = \left(\frac{64-80}{8} > Y \right)C = (80 > M)C \quad (3)$$

$$(138)C - 0.9192 = (138)C = (138 > Y)C = \left(\frac{64-75}{8} > Y \right)C = (75 > M)C \quad (4)$$

$$75.24 = 64 + 11.24 = M \leftarrow 11.24 = 64 - M \quad (5)$$

$$0.0968 = (13 -)C = (13 > Y)C = \left(\frac{64-54}{8} > Y \right)C = (54 > M)C \quad (6)$$

عدد الطلاب المتوقع $12 \cong 11.616 = 120 \times 0.0968$ طالباً.

مثال (5-13): اذا علم ان معدلات الكفاءة في احدى الكليات التي عدد طلابها

300 طالب تتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط 2.1 وانحراف معياري 1.2 كم من

هؤلاء الطلبة يتوقع ان تكون علاماته تتراوح بين 2.5-3.5 اذا علم ان

التقريب هو لاقرب خانة عشرية.

الحل: $N = 300, \mu = 2.1, \sigma = 1.2$

$$\left(\frac{1.4}{1.2} > Y > \frac{0.4}{1.2} \right)C = \left(\frac{2.1-3.5}{1.2} > Y > \frac{2.1-2.5}{1.2} \right)C$$

$$C(0.33 > Y > 1.17)$$

$$(0.33)C - (1.17)C =$$

$$0.247 =$$

$$\text{عدد الطلاب} = 0.2497 \times 300 = 75 \text{ طالباً}$$

أسئلة عامة على المنحنى الطبيعي

س1 اعطيت احدى الشعب امتحانا في الاحصاء من عشر علامات، وكانت النتائج تدرج من الصفر حتى (10) وكان متوسط علامات الطلاب في هذا الامتحان 6.5 والانحراف المعياري 1.5 فاذا افترضنا ان العلامات تتوزع توزيعا طبيعيا فأوجد ما يلي:-

- (1) حدد النسبة المئوية لعدد الطلاب الذين حصلوا على (7) علامات.
- (2) اكبر علامة سجلها ال 20% من الطلاب ذوي العلامات المتدنية في الفصل.
- (3) اصغر علامة سجلها ال 20% من الطلاب ذوي العلامات المرتفعة في الفصل.

س2 اخذت عينة مكونة من 200 انبوب من احدى مصانع الانابيب وكان متوسط قطر الانبوب 10 سم والانحراف المعياري 0.5 سم وكان استخدام هذا الانبوب يسمح بانحراف في القطر يتراوح اقصاه من 9.5 - 10.5 سم وفيما غير ذلك تعتبر الانابيب تالفة. اوجد النسبة المئوية للانابيب التالفة الناتجة في هذا المصنع على افراض ان اقطار الانابيب تتوزع توزيعا طبيعيا.

س3 متوسط طول 400 شجرة سرور 7م والانحراف المعياري 0.8 م فاذا فرضنا ان الاطوال تتوزع توزيعا طبيعيا فأوجد ما يلي:-

- 1- عدد الاشجار التي اطوالها بين 6-7.5م
 - 2- عدد الاشجار التي تزيد اطوالها عن 8م
- س4 اذا كان متوسط اعمار البدلات التي تستوردها المؤسسة العسكرية للجنود 36

شهرًا والانحراف المعياري 6 شهور وكان عمر البدلات يأخذ شكل التوزيع الطبيعي فإذا استوردت المؤسسة 5000 بدلة فكم بدلة تحتاج إلى الاستبدال بعد 30 شهرًا.

س5 إذا كانت وزارة التعليم العالي تمنح لأعلى 4٪ من طلبة كليات المجتمع في الفحص الشامل بعثات دراسية وكانت علامات طلاب الكلية قريبة من توزيع طبيعي وسطه الحسابي 65 وانحرافه المعياري 6 فما هي أقل علامة تحصل على بعثة دراسية.

س6 الأزواج التالية هي قيم معيارية تحصر بينها جزءًا من مساحة المنحنى المطلوب إيجاد المساحة الواقعة خارج كل زوجين.

أ- (-1.8، 1.8) ب- (-1.6، 1.6) ج- (-2.28، 2.28)

س7 جد المساحة المحصورة بين كل زوج من القيم المعيارية التالية:-

أ- (-0.4، 0.4) ب- (-0.6، 0.6) ج- (-1.2، 1.2)

س8 جد المساحة الموجودة إلى يمين كل من القيم المعيارية التالية :

أ) -1.3 ب) -1 ج) 1.2 د) -0.8

س9 جد المساحة الموجودة إلى يسار كل من القيم المعيارية التالية :

أ) 1.5 ب) 0.8 ج) صفر د) -0.5

الوحدة السادسة

نظرية الاحتمالات

مقدمة:

تبحث نظرية الاحتمالات في الحوادث التي نتائجها غير مؤكدة بل عشوائية وهنا نعطي التعريف التالي.

تعريف: العشوائية هي التجربة التي نتائجها ترتبط بالصدفة وكذلك غير مؤكدة النتائج.

ومن المفيد ايضا وحتى نستطيع فهم نظرية الاحتمالات بشكلها الجيد لابد من تقديم التعريفات التالية والتركيز على مزيد من الامثلة.

6-1 : الفضاء العيني :

تعريف : الفضاء العيني لتجربة ما هو مجموعة جميع النتائج المتوقعة من هذه التجربة وسنرمز لها بالرمز Ω .

تعريف: الحدث هو مجموعة جزئية من الفضاء العيني وسنرمز له بأي حرف من الحروف الابجدية.

وهناك عدة انواع من الاحداث تقدم تعريفاتها.

تعريف: الحدث البسيط هو الحدث الذي تحتوي مجموعته على عنصر واحد من عناصر الفضاء العيني.

تعريف: الحدث المركب هو الحدث الذي تحتوي مجموعته على اكثر من عنصر من عناصر الفضاء العيني.

تعريف: الحدث المؤكد هو الحدث الذي تحتوي مجموعته على جميع عناصر الفضاء العيني.

تعريف: الحدث المستحيل هو الحدث الذي يستحيل وقوعه ومجموعته لا تحتوي على عناصر من عناصر الفضاء العيني.

بعد تناولنا هذه التعريفات نورد الامثلة التالية.

مثال (6-1): في تجربة القاء حجر نرد مرة واحد

(1) اكتب الفضاء العيني لهذه التجربة.

(2) الحدث أ الذي يمثل ظهور عدد اولي ثم اذكر نوع الحدث.

(3) الحدث ب الذي يمثل ظهور عدد اولي ثم اذكر نوع هذا الحدث

(4) الحدث جـ الذي يمثل ظهور العدد على الوجه العلوي لحجر النرد واذكر نوع الحدث.

(5) الحدث د الذي يمثل ظهور عدد اقل من او يساوي 6 على الوجه العلوي واذكر نوعه.

(6) الحدث هـ الذي يمثل ظهور العدد 7 على الوجه العلوي لحجر النرد واذكر نوع الحدث.

الحل: (1) الفضاء العيني للتجربة $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(2) الحدث أ = $\{2, 3, 5, 6\}$ وهذا حدث مركب لاحتواء مجموعته على اكثر من عنصر.

(3) الحدث ب = $\{2, 3, 5\}$ وهذا حدث بسيط لاحتواء مجموعته على عنصر واحد.

(4) الحدث جـ = $\{1\}$ وهذا حدث بسيط لاحتواء مجموعته على عنصر واحد.

(5) الحدث د = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وهذا حدث مؤكد لاحتواء مجموعته على عناصر

الفضاء العيني.

(6) الحدث هـ = $\{\emptyset\}$ وهذا حدث مستحيل لعدم احتواء مجموعته على عناصر

مثال (6-2): في تجربة القاء قطعة نقود مرتين متاليتين اكتب مايلي.

(1) الفضاء العيني لهذه التجربة.

(2) الحدث الذي يمثل ظهور وجهين متشابهين على الوجهين الظاهريين.

(3) الحدث الذي يمثل ظهور كتابة واحدة على احد الوجهين الظاهريين.

(4) الحدث الذي يمثل ظهور صورة واحدة على الاقل

(5) الحدث الذي يمثل ظهور صورتين على الاكثر.

الحل: 1) $\Omega = \{ص، ص، ك، ك، ك\}$ حيث ص يمثل ظهور صورة ، ك يمثل ظهور كتابة.

2) $A = \{ص، ص، ك\}$ يعني ظهور صورتين او كتابتين.

3) $B = \{ص، ك، ك، ص\}$

4) $C = \{ص، ك، ك، ص، ص، ص\}$

5) $D = \{ك، ك، ك، ص، ص، ك، ص، ص\} = \Omega$

مثال (6-3) : صندوق به 8 مصابيح خمسة منها سليم سحب مصباحان على التوالي دون ارجاع اوجد ما يلي

1) عدد عناصر الفضاء العيني لهذه التجربة.

2) عدد عناصر الحدث أ الذي يمثل ظهور اثنتين سليمتين.

3) عدد عناصر الحدث ب الذي يمثل ظهور اثنتين تالفتين.

4) عدد عناصر الحدث جـ الذي يمثل ظهور احدهما سليم والاخرى تالفة.

الحل:

1) عدد عناصر الفضاء العيني $= \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{2 \times 1 \times 6!} = 28$ حيث ان عدد

المصابيح = 8 ويراد اختيار اثنتين منها.

2) عدد عناصر الحدث أ $= \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$ حيث ان عدد المصابيح السليمة هو 5

ويراد اختيار اثنتين منها.

3) عدد عناصر الحدث ب $= \binom{3}{2} = \frac{3 \times 2}{1 \times 2} = 3$ حيث ان عدد المصابيح التالفة 3 ويراد

اختيار اثنتين منها.

4) عدد عناصر الحدث جـ $= \binom{5}{1} \binom{3}{1} = 5 \times 3 = 15$ حيث ان عدد المصابيح السليمة

خمسة ويراد اختيار احدهما وكذلك المصابيح التالفة ثلاثة ويراد اختيار احدهما.

$$(4) \quad C(A \cup B) = C(A) + C(B) - C(A \cap B)$$

$$(5) \quad A \cap B \leftarrow \emptyset \Leftrightarrow C(A \cup B) = C(A) + C(B).$$

$$(6) \quad C(A - B) = C(A) - C(A \cap B) = C(A \cap \bar{B})$$

$$(7) \quad C(B - A) = C(B) - C(A \cap B) = C(\bar{A} \cap B)$$

وهنا بعض الخصائص في الاحتمالات نورد اهمها

(1) اذا كانت الاحداث A_1, A_2, A_3, \dots أن اثنين فيهما احداثا منفصلة فاذا كان $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ فان

$$C(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = C(A_1) + C(A_2) + C(A_3) + \dots + C(A_n) = C(\Omega) = 1$$

(2) اذا كان $A \supset B \Leftrightarrow C(A) \geq C(B).$

(3) $C(\bar{A}) = 1 - C(A)$ حيث \bar{A} هي متمم الحدث A بالنسبة لـ Ω .

مثال (6-6) : اذا كان $\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ والدوال التالية معرفة على Ω فأي من هذه الدوال هي دالة احتمالية.

$$(1) \quad C(A_1) = \frac{1}{3}, C(A_2) = \frac{1}{4}, C(A_3) = \frac{1}{5}, C(A_4) = \frac{1}{6}$$

$$(2) \quad C(A_1) = \frac{1}{3}, C(A_2) = \frac{1}{3}, C(A_3) = \frac{1}{3}, C(A_4) = \frac{1}{6}$$

$$(3) \quad C(A_1) = \frac{1}{4}, C(A_2) = \frac{1}{3}, C(A_3) = \frac{1}{2}, C(A_4) = \frac{1}{4}$$

ملاحظة: حتى تكون الدالة المعطاة دالة احتمالية يجب ان يكون مجموع احتمالات عناصر الفضاء العيني .

الحل: (1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \Omega$

$$(1) \quad C(A_1) + C(A_2) + C(A_3) + C(A_4) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{10+12+15+20}{60} = \frac{57}{60} \neq 1$$

∴ الدالة ليست دالة احتمالية.

$$(2) \therefore {}_3C_2 = \frac{1-}{3} \text{ ولا يجوز } \therefore {}_2\text{ ليس دالة احتمال.}$$

$$(3) {}_3C_1 + {}_3C_2 + {}_3C_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} = ({}_4^1) {}_3C_1 + ({}_3^2) {}_3C_2 + ({}_2^1) {}_3C_3 + ({}_1^1) {}_3C_3$$

$$\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \}$$

\therefore فالدالة ح دالة احتمال.

مثال (6-7): إذا كان $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \}$ وإذا كان ح دالة احتمالية معرفة على Ω

أوجد قيمة المجهول في كل مما يلي.

$$(1) {}_3C_1 = \frac{1}{3}, {}_3C_2 = \frac{1}{6}, {}_3C_3 = \frac{1}{9}, {}_3C_4 = r$$

$$(2) {}_3C_1 = \frac{1}{4}, {}_3C_2 = \frac{1}{4}, {}_3C_3 = 2, {}_3C_4 = r \text{ أوجد } r = ({}_4^1) {}_3C_1 + ({}_3^2) {}_3C_2 + ({}_2^1) {}_3C_3 + ({}_1^1) {}_3C_4$$

الحل: (1) $1 = ({}_4^1) {}_3C_1 + ({}_3^2) {}_3C_2 + ({}_2^1) {}_3C_3 + ({}_1^1) {}_3C_4$ لان الدالة ح احتمالية.

$$1 = ({}_4^1) {}_3C_1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$$

$$1 = ({}_4^1) {}_3C_1 + \frac{11}{18} \Rightarrow 1 = ({}_4^1) {}_3C_1 + \frac{2+3+6}{18}$$

$$\therefore ({}_4^1) {}_3C_1 = \frac{11}{18} - 1 = \frac{7}{18}$$

(2) إذا فرضنا ان ح $({}_4^1) {}_3C_1 = 2$ س وعليه فان

$$1 = ({}_4^1) {}_3C_1 + ({}_3^2) {}_3C_2 + ({}_2^1) {}_3C_3 + ({}_1^1) {}_3C_4$$

$$1 = 2س + 2س + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$1 = 3س + \frac{2}{4}$$

$$3س = \frac{2}{4} - 1 = \frac{2}{4}$$

$$\therefore ({}_4^1) {}_3C_1 = \frac{1}{6}, ({}_3^2) {}_3C_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore س = \frac{1}{6} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{12}$$

مثال (6-8): اذا كان لدينا $\bar{A} = \frac{1}{2}$ ، $B = \frac{3}{8}$ ، $A \cap B = \frac{1}{4}$

اوجد ما يلي:

$$(1) P(A \cup B) \quad (2) P(\bar{A}) \quad (3) P(\bar{B}) \quad (4) P(\bar{A} \cap \bar{B}) \quad (5) P(A \cup \bar{B}) \quad (6) P(\bar{A} \cap B) \quad (7) P(A \cap \bar{B})$$

الحل:

$$(1) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$(2) \frac{3}{8} = \frac{2-1+4}{8} = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} + \frac{1}{2} =$$

$$(3) \frac{5}{8} = \frac{3}{8} - 1 = P(B) - 1 = P(\bar{B})$$

$$(4) \frac{5}{8} = \frac{3}{8} - 1 = P(A \cup B) - 1 = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$(5) \frac{3}{4} = \frac{1}{4} - 1 = P(A \cap B) - 1 = P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A} \cap B)$$

ملاحظة: القانونان اللذان ساعدتا في حل الجزء 4، 5 هما قانونان ديمورغات في

الاحتمالات وهما:

$$(1) P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \overline{P(A \cup B)}$$

$$(2) P(\bar{A} \cap B) = \overline{P(A \cap \bar{B})}$$

$$(6) \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = P(A \cap B) - P(A) = P(\bar{A} \cap B)$$

$$(7) \frac{1}{8} = \frac{2}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} = P(A \cap B) - P(B) = P(A \cap \bar{B})$$

6-2-3 الاحتمال المنتظم والتكرار النسبي:

تعريف: اذا كان احتمال وقوع كل مفردة من مفردات الفضاء العيني متساو فاننا نقول بأن الاحتمال منتظم.

فإذا كان أ حدث في Ω فإن احتمال أ يمكن إيجاده من العلاقة

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر الحدث } A}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

(1-6).....

مثال (6-9): في تجربة القاء حجر نرد مرة واحدة ان احتمال ظهور كل عنصر من

$$\text{الفضاء العيني ح} = (1) \text{ح} - (2) \text{ح} - (3) \text{ح} - (4) \text{ح} - (5) \text{ح} - (6) \text{ح} = \frac{1}{6}.$$

وعليه فان هذا الاحتمال يسمى بالاحتمال المنتظم أو التكرار النسبي.

مثال (6-10): في تجربة سباق الخيول فان احتمال نجاح خيل مختلف عن الخيل الآخر

وعليه فان هذا النوع من الاحتمال يسمى بالاحتمال غير المنتظم.

مثال (6-11): كيس به خمسة كرات حمراء، 4 بيضاء، 3 زرقاء سحب من الكيس

كرة واحدة ما احتمال ان تكون الكرة المسحوبة بيضاء.

الحل: ليكن أ هو الحدث الذي يمثل ظهوره كرة بيضاء فان عدد الكرات البيضاء في

الكيس 4 وعدد الكرات جميعها 12.

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

مثال (6-12): صندوق به 12 كرة مرقما من 1 الى 12 سحب من الصندوق كرة

واحدة ما احتمال ان تكون الكرة المسحوبة عليها رقم يقبل القسمة على 3.

الحل: ليكن الحدث هو أ وعليه فان

$$A = \{1, 3, 6, 9, 12\}, n(A) = 4, n(\Omega) = 12. \therefore$$

$$P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

مثال (6-13): صندوق به 5 كرات حمراء، 3 كرات زرقاء، 4 كرات صفراء؟ ما

احتمال ان تكون الكرتان المسحوبتان حمراوان.

3) سحبت اربعة كرات على التوالي دون ارجاع ما احتمال ان تكون اول كرتان مسحوبتان حمراوان والثالثة صفراء والرابعة زرقاء؟

4) سحبت ثلاث كرات على التوالي مع الارجاع ما احتمال ان تكون الكرة الاولى حمراء والثانية صفراء والثالثة زرقاء؟

الحل: 1) ليكن الحدث المطلوب أ فان:

$$\frac{5}{33} = \frac{10}{66} = \frac{\frac{4 \times 5}{1 \times 2}}{\frac{11 \times 12}{1 \times 2}} = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} = (أ)$$

2) ليكن الحدث المطلوب ب فان

$$\frac{3}{22} = \frac{30}{220} = \frac{\frac{5 \times 3 \times 4}{1 \times 1 \times 2}}{\frac{10 \times 11 \times 12}{1 \times 2 \times 3}} = \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{2}}{\binom{12}{3}} = (ب)$$

3) ليكن الحدث المطلوب هو ج فان ج(-)

$$\frac{2}{99} = \frac{3}{9} \times \frac{4}{10} \times \frac{4}{11} \times \frac{5}{12} = ج(-)$$

4) ليكن الحدث المطلوب د فان ج(د)

$$\frac{5}{144} = \frac{3}{12} \times \frac{5}{12} \times \frac{4}{12} = ج(د)$$

لان السحب مع الاعادة وعليه يبقى عدد الكرات الكلي = 12 وعدد الكرات من كل لون ثابت.

مثال (6-14): صندوق به 15 مصباح خمسة منها تالفة سحبت من الصندوق ثلاث مصابيح معا اوجد الاحتمالات التالية.

(1) احتمال ان الثلاثة مصاييح سليمة.

(2) احد هذه المصاييح الثلاث تألف.

(3) احتمال احدهما على الاقل تألف.

الحل: (1) عندما يكون عدد المصاييح الثلاثة خمسة مصاييح معنى ذلك ان عشرة فيها

سليم ويراد سحب 3 مصاييح من بين خمسة عشر مصباح ويتم ذلك بعدد الطرق

$$\text{المختلفة} = \binom{15}{3} = \frac{13 \times 14 \times 15}{1 \times 2 \times 3} = 455 \text{ طريقة}$$

ويراد ان تكون الثلاثة مصاييح المسحوبة سليمة وبما ان عدد المصاييح السليمة 10 لذا

يمكن اختيار ثلاثة منها بعدد من الطرق $= \binom{10}{3} = \frac{8 \times 9 \times 10}{1 \times 2 \times 3} = 120$ طريقة مختلفة

$$\text{وعليه فاذا كان الحدث المطلوب هو أ فان ح(أ)} = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}$$

(2) ليكن الحدث ب هو الحدث المطلوب فان

$$\text{ح(ب)} = \frac{\binom{5}{1} \binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{\frac{5 \times 9 \times 10}{1 \times 2}}{\frac{13 \times 14 \times 15}{1 \times 2 \times 3}} = \frac{5 \times 45}{455} = \frac{225}{91}$$

(3) ان احتمال الحصول على الاقل واحدة تالفة هو متمم للحدث الذي يمثل الحصول

على ثلاثة سليمة فاذا كان الحدث يمثل ج فان

$$\text{ح(ج)} = 1 - \text{ح(أ)}$$

$$= 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$$

مثال (6-15): اذا كان لدينا عشر بطاقات مرقمة من 1 الى 10 بداخل صندوق

خلطت بشكل جيد اوجد ما يلي.

(1) اذا سحبنا بطاقتان معا من الصندوق ما احتمال ان يكون مجموع الرقمين على البطاقتين عدد فردي.

(2) اذا سحبنا بطاقتان على التوالي دون ارجاع البطاقة المسحوبة ما احتمال ان يكون مجموع الرقمين الظاهرين عددا فرديا.

(3) اذا سحبنا بطاقتان على التوالي وكان السحب مع الارجاع ما احتمال ان يكون مجموع الرقمين الظاهرين على البطاقتين عددا فرديا.

الحل: (1) ان سحب بطاقتين من بين عشرة بطاقات يتم بعدد من الطرق المختلفة عددها عدد الطرق $= \binom{10}{2} = \frac{9 \times 10}{1 \times 2} = 45$.

اما بالنسبة لسحب بطاقتين بحيث يكون مجموعهما فردي يجب ان تكون البطاقة الاولى اما عدد زوجي والبطاقة الثانية فردية لان المجموع فردي أي عدد زوجي + عدد فردي = عدد فردي وهنا لدينا خمسة اعداد فردية وخمسة اعداد زوجية وهي على النحو التالي:

العدد الفردي	العدد الزوجي
1	2
3	4
5	6
7	8
9	10

ونستطيع تمثيل عدد الطرق المختلفة لسحب هذه البطاقات ليكون المجموع عدد فردي بالشجرة على النحو ومن خلال هذا التمثيل نلاحظ ان عدد الطرق المختلفة = $5 \times 5 = 25$ طريقة

(1) فإذا كان الحدث يمثل أ فإن

$$ح(أ) = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$$

(2) إذا كان الحدث المطلوب ب فإن

$$ح(ب) = \frac{25+25}{90} = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}$$

(3) إذا كان الحدث المطلوب هو جـ فإن

$$ح(ج) = \frac{25+25}{100} = \frac{1}{2}$$

لان السحب مع الاعادة فان عدد الطرق المختلفة = $10 \times 10 = 100$

مثال (6-16): صف به 25 طالبا ذكور 15 اناثا رسب 9 طلاب، 6 طالبات في مادة

الرياضيات اختبر احد الطلبة بشكل عشوائي اوجد احتمال ان يكون

الطالب المختار هو من الذكور او راسب في الرياضيات.

الحل: عدد عناصر الفضاء العيني $\Omega = 25 + 15 = 40$

وليكن الحدث أ هو الممثل لان يكون الطالب المختار هو من الذكور فان

ن(أ) = 25 وان الحدث ب يمثل ان يكون الطالب المختار راسب في الرياضيات فان

ن(ب) = 9 + 6 + 15 وان الحدث أ ∩ ب هو ان يكون الطالب المختار هو من الذكور

وراسب في الرياضيات وان ن(أ ∩ ب) = 9 وعليه فان

ح(أ) = $\frac{25}{40}$ ، ح(ب) = $\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$ ، ح(أ ∩ ب) = $\frac{9}{40}$ والمطلوب إيجاد ح(أ ∪ ب) لذا

نجد هذا الاحتمال من العلاقة ح(أ ∪ ب) = ح(أ) + ح(ب) - ح(أ ∩ ب)

$$= \frac{25}{40} + \frac{15}{40} - \frac{9}{40} = \frac{31}{40}$$

مثال (6-17): في تجربة القاء حجر نرد متمايزين في الهواء اوجد الاحتمالات التالية.

- (1) ظهور عددين متساويين على الوجهين العلويين.
- (2) ظهور المجموع 10 على الوجهين الظاهريين.
- (3) ظهور المجموع 13 على الوجهين الظاهريين.
- (4) ظهور عدد فردي على احد الوجهين الظاهريين فقط.
- (5) ظهور عدد اكبر من 4 على احد الوجهين الظاهريين.
- (6) ظهور مجموع 9 على الاقل على الوجهين الظاهريين.
- (7) ظهور مجموع 6 على الوجهين الظاهريين او عدد زوجي على كلا الوجهين الظاهريين.
- (8) ظهور مجموع فردي على الوجهين الظاهريين.

الحل: ان الفضاء العيني لهذه التجربة $\Omega = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), \dots, (6,6)\}$

$$(1) \quad A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$(2) \quad B = \{(1,2), (2,1), (3,4), (4,3), (5,6), (6,5)\} \Rightarrow P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$(3) \quad C = \emptyset \Rightarrow P(C) = 0$$

$$(4) \quad D = \{(1,2), (2,1), (3,4), (4,3), (5,6), (6,5), (1,3), (3,1), (2,4), (4,2), (3,5), (5,3), (4,6), (6,4), (5,1), (1,4), (4,5), (5,2), (2,3), (3,6), (6,3), (1,6), (6,1)\}$$

$$\therefore P(D) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$(5) \quad E = \{(1,5), (5,1), (2,5), (5,2), (3,5), (5,3), (4,5), (5,4), (6,5), (5,6)\}$$

$$\{(1,6), (6,1), (2,6), (6,2), (3,6), (6,3), (4,6), (6,4)\}$$

$$P(E) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$(6) \quad F = \{(1,4), (4,1), (2,5), (5,2), (3,6), (6,3), (4,5), (5,4), (6,6), (6,6), (4,6), (6,4), (3,6), (6,3)\}$$

$$P(F) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

$$ل = \{(2,6), (6,2), (6,6), (4,4), (2,2), (3,3), (1,5), (5,1), (2,4), (4,2)\} \\ \{(6,4), (4,6)\}$$

$$ح(ل) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$ع - \{(2,5), (5,2), (1,6), (6,1), (1,2), (2,1), (1,4), (4,1), (2,3), (3,2)\} \\ \{(5,6), (6,5), (3,6), (6,3), (3,4), (4,3)\}$$

$$ح(ع) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

3-6: الاحداث المستقلة:

تعريف: تكون الاحداث مستقلة اذا كان وقوعها بعضها البعض واذا كان أ، ب حدثان فحتى يكونا مستقلين فان.

$$\begin{aligned} 1) ح(أ \cap ب) &= ح(أ) \cdot ح(ب) \\ 2) ح(أ/ب) &= ح(أ), ح(ب/أ) = ح(ب) \end{aligned}$$

.....(6-2)

ملاحظة: يجب التفريق بين الاحداث المستقلة والاحداث المنفصلة حيث ان الاحداث المستقلة تقاطعها ليس \emptyset بينما الاحداث المنفصلة فان تقاطعها تساوي \emptyset .

مثال(6-18): في تجربة القاء قطعتي نقود متمايزتين اذا كان الحدث أ يمثل ظهور الصورة على القطعة الاولى والحدث ب يمثل ظهور صورة على الثانية فهل الحدثان أ، ب مستقلين؟

الحل: نكتب أولاً المجموعات على صيغة عناصر

$$أ = \{ص ص, ص ك, ك ص, ك ك\} ب = \{ص ص, ص ك, ك ص, ك ك\} \text{ وعليه فان}$$

$$أ \cap ب = \{ص ص\}, ح(أ) = \frac{2}{4}, ح(أ \cap ب) = \frac{1}{4}$$

$$ح(ب) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore ح(أ) \times ح(ب) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = ح(أ \cap ب) \therefore \text{الحدثان أ، ب مستقلين}$$

نتيجة: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

نظرية: إذا كان A_1, A_2 حدثان من Ω فإن

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \quad (1)$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2) \quad (2)$$

وهذان القانونان يفيدان في حل كثير من المسائل في الاحتمالات.

نظرية بييز:

نص النظرية: إذا كان A_1, A_2, \dots, A_n أحداث في Ω بحيث أن

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \emptyset$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$$

كما هو موضح بالشكل وبرز حدث يشترك في جميع الاحداث الجزئية مثل ي فإن احتمال حصول الحدث ي بمعلومية وقوع الحدث أ يكون على النحو التالي.

$$P(A_i | A) = \frac{P(A_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A_i) \cdot P(A | A_i)}{P(A_1) \cdot P(A | A_1) + P(A_2) \cdot P(A | A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(A | A_n)} \quad (3-6)$$

مثال (6-19): في مصنع للمسامير الآلة رقم 1 30٪ من المسامير والآلة رقم 2 40٪

والآلة رقم 3 30٪ ونسب التالف هي ان الآلة رقم 1 و2 للآلة رقم 4 والآلة رقم 3

واخذت مما انتجه المصنع ووجد انه تالف ما احتمال انه يصنع بواسطة الآلة رقم 3.

الحل: نضع ملخصاً للبيانات المعطاة:

$$P(A_1) = 0.30, P(A_2) = 0.40, P(A_3) = 0.30$$

$$P(B | A_1) = 0.1, P(B | A_2) = 0.2, P(B | A_3) = 0.4$$

$$P(A_1 \cap B) = 0.03, P(A_2 \cap B) = 0.08, P(A_3 \cap B) = 0.12$$

$$\frac{(b/a)(a/3)c}{(a/3)c(b/a/3)c + (b/a/2)(a/2)c + (b/a/1)(a/1)c} = (a/3/b)c$$

$$\frac{0.04 \times 0.3}{0.04 \times 0.30 + 0.02 \times 0.40 \times 0.01 \times 0.30} =$$

$$\frac{0.012}{0.02 + 0.008 + 0.003} =$$

$$0.52 = \frac{0.012}{0.023} =$$

$$0.48 = 0.52 - 1 \text{ ح (ب/أ)}$$

مثال (6-20): ينتج احد معامل الاحذية ما نسبته 60% والآخر 40% من الانتاج

الكلي فاذا علم ان نسبة السليم من الانتاج الاول = 90% والثاني 80% .

(1) المطلوب إيجاد احتمال سحب وحدة انتاج عشوائية خالية من العيوب.

(2) اذا سحبت وحدة انتاج عشوائية وتبين انها خالية من العيوب ما احتمال ان تكون من المعمل الاول.

$$\text{ح (I)} = 0.60, \text{ح (II)} = 0.40$$

$$\text{ح (I/س)} = 0.90, \text{ح (II/س)} = 0.80$$

$$(1) \text{ح (س)} = \text{ح (I)} * \text{ح (I/س)} + \text{ح (II/س)} * \text{ح (II/س)}$$

$$0.86 = 0.32 + 0.54 = 0.80 \times 0.40 + 0.90 \times 0.60 =$$

$$(2) \text{ح (I/II)} = \frac{\text{ح (I)} \times \text{ح (I/س)}}{\text{ح (س)}} = \frac{0.90 \times 0.60}{0.86} = \frac{0.54}{0.86}$$

6-4) الاحتمال الشرطي .

تعريف : ان احتمال حدث معين شرط وقوع حدث آخر ويرمز له بالرمز

$$\text{ح (أ/ب)} = \frac{\text{ح (أ \cap ب)}}{\text{ح (ب)}} \Leftrightarrow \text{ح (أ \cap ب)} = \text{ح (أ/ب)} \times \text{ح (ب)}$$

.....(4-6)

$$\text{ح (ب/أ)} = \frac{\text{ح (أ \cap ب)}}{\text{ح (أ)}} \Leftrightarrow \text{ح (أ \cap ب)} = \text{ح (ب/أ)} \times \text{ح (أ)}$$

وكذلك يمكن استنتاج ان الاحداث المتتامة.

$$\frac{(A \cup B)C - 1}{(B)C - 1} = \frac{(\overline{A \cap B})C}{(B)C - 1} = \frac{(\overline{A \cap B})C}{(\overline{B})C} = (\overline{A} / \overline{B})C$$

$$\frac{(A \cup B)C - 1}{(A)C - 1} = \frac{(\overline{A \cap B})C}{(A)C - 1} = \frac{(\overline{A \cap B})C}{(A)C} = (\overline{A} / A)C$$

مثال (6-21): اذا كان $C(A) = \frac{1}{3}$ ، $C(B) = \frac{1}{4}$ ، $C(A \cup B) = \frac{1}{2}$ والمطلوب إيجاد ما يلي:

$$\begin{aligned} (1) & C(A/B) & (2) & C(B/A) & (3) & C(\overline{A} / \overline{B}) \\ (4) & C(\overline{A} / \overline{B}) & (5) & C(A \cap B) \end{aligned}$$

الحل: (1) من العلاقة

$$C(A \cup B) = C(A) + C(B) - C(A \cap B)$$

$$C(A \cap B) = C(A) + C(B) - C(A \cup B)$$

$$\frac{1}{12} = \frac{6-3+4}{12} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} =$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{12} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \therefore C(A/B) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{12} = \frac{C(A \cap B)}{C(B)} \therefore C(A/B) = \frac{1}{3}$$

$$(3) \quad \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{(A \cup B)C - 1}{(B)C - 1} = \frac{(\overline{A \cap B})C}{(B)C - 1} = \frac{(\overline{A \cap B})C}{(\overline{B})C} = (\overline{A} / \overline{B})C$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{2}{3}-1} = \frac{(U \cap B)^c - 1}{(A)^c - 1} = \frac{(A \cap B)^c}{(A)^c} = (A \cap B)^c \quad (4)$$

$$\cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{12} = \frac{1-4}{12} = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} = (A \cap B)^c - (A)^c = (A \cap B)^c - (A)^c \quad (5)$$

نظرية: إذا كان $A \cap B = \emptyset$ فإن $(A \cap B)^c = \text{صفر}$ وعليه فإن $(A/B)^c = \text{صفر}$ ،
ج(ب/أ) = صفر.

5-6 : المتغيرات العشوائية ذات البعد الواحد :

المقدمة

سنتناول في هذا الفصل المتغيرات العشوائية ودوالها الاحتمالية ذات البعد الواحد وسنبدا بإعطاء التعريف التالي :

5-6-1 تعريف المتغير العشوائي

تعريف : يقال للدالة التي تربط كل عنصر من عناصر الفضاء العيني بعدد حقيقي بالمتغير العشوائي ويمكن لهذا المتغير أن يقاس.

وهنا لا بد من معرفة القيم الحقيقية التي سيأخذها المتغير العشوائي وكذلك احتمالاتها. وحتى يكون التوزيع الذي يمثل قيم المتغير العشوائي واحتمالاتها توزيعاً احتمالياً فإنه يتوجب أن يكون

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1 \quad (5-6) \dots\dots$$

ولتوضيح هذا المفهوم نورد الأمثلة التالية

مثال (6-22) : في تجربة القاء قطعتي نقود (متمايزتين) معاً إذا كان المتغير العشوائي يمثل عدد مرات ظهور صورة أكتب التوزيع الذي يمثل القيم التي يأخذها المتغير العشوائي واحتمالاتها وبين أن هذا التوزيع هو توزيع احتمالي.

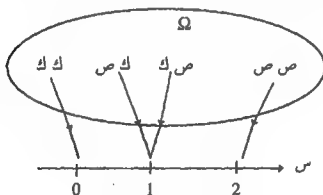
الحل : إن الفضاء العيني لهذا التوزيع هو $\Omega = \{صص، صك، كص، كك\}$. وعليه فإن قيم s هي على النحو التالي

$s(كك) = صفر$ لأن عدد الصور الظاهرة هي صفراً.

$s(صص، كص) = 1$ لأن عدد الصور الظاهرة في كلتا الحالتين هي صورة واحدة.

$s(صص، صص) = 2$ لأن عدد الصور الظاهرة هي صورتان.

والآن يمكن توضيح هذا المفهوم بالشكل (1-1) وهو الربط بين عناصر الفضاء العيني والأعداد الحقيقية حتى نصل إلى نص التعريف للمتغير العشوائي.



شكل (6-1) يمثل قيم s الممكنة

ولحساب احتمال قيم s نحدد كما يلي.

$$ح(س = صفر) = ح(كك) = \frac{1}{4}$$

$$ح(س = 1) = ح(كص، صك) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

ويمكن تلخيص ما وجد أعلاه في جدول التوزيع (1-6).

س	0	1	2
ح(س)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

جدول (1-6)

6-6 : بعض المقاييس على التوزيعات الاحتمالية

1-6-6 : القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي :

إذا كان لدينا المتغير العشوائي س وقيم هذا المتغير s_1, s_2, \dots, s_n ، وكان احتمال كل قيمة على التوالي ح (س = s_1)، ح (س = s_2)، ... ح (س = s_n) فإن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي س والتي سنرمز لها بالرمز ت(س) تعرف على النحو التالي :

$$ت(س) = س_1 \cdot ح(س = s_1) + س_2 \cdot ح(س = s_2) + \dots + س_n \cdot ح(س = s_n) = \mu$$

..... (6-6)

$$ت(س) = \sum_{i=1}^n س_i \cdot ح(س_i)$$

أو

ونسمى ت(س) = μ بالمتوسط الحسابي للمجتمع.

وإذا كنا نناقش في أكثر من متغير عشوائي فإن القيمة المتوقعة لكل متغير يعبر عنها بالرمز μ ولكن يوضع تحتها اسم المتغير العشوائي كما يلي μ_1, μ_2, \dots .
خاصية : إذا كانت ح قيمة عددية ثابتة فإن.

$$ت(ح) = ح \cdot ت(س)$$

مثال (6-23) : الجدول (6-2) يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س.

س	-2	-1	1	2	3
ح(س)	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1

جدول (6-2)

المطلوب : إيجاد القيمة المتوقعة لهذا التوزيع.

الحل : إن القيمة المتوقعة لهذا التوزيع يمكن إيجادها على النحو

$$ت(س) = -2 \times 0.1 + -1 \times 0.3 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.1$$

$$= -0.2 + -0.3 + 0.3 + 0.4 + 0.3 = 0.5$$

مثال (6-24) : إذا كان س متغير عشوائي يأخذ القيم م، 2م، 3م،، م (م-1)، م². حيث م عدد صحيح، ك عدد ثابت وإذا كان الاحتمال لكل قيمة على النحو.

$$ح(س=س^2) = \frac{س^2}{ك}$$

أوجد قيمة الثابت ك بدلالة م علماً بأن توزيع س توزيعاً احتمالياً.

الحل : إن احتمالات المتغير العشوائي هي على التوالي

$$ح(س=م) = \frac{م^2}{ك}$$

$$ح(س=2م) = \frac{4م^2}{ك}$$

⋮

$$ح(س=م^2) = \frac{م^4}{ك}$$

ومن خاصية أن التوزيع الاحتمالي تكون مجموع الاحتمالات لقيم المتغير العشوائي

= 1 فإن

$$\frac{m^2}{k} = \frac{m^2}{k} + \dots + \frac{m^4}{k} + \frac{m^2}{k}$$

بأخذ العامل المشترك

$$\frac{m(1+m)}{2} = m + \dots + 2 + 1 \text{ ومن العلاقة } 1 = (m + \dots + 2 + 1) \frac{m}{k}$$

$$\frac{m}{k} = 1 = \left(\frac{m(1+m)}{2} \right) \frac{m}{k} \Leftrightarrow k = m^2(1+m).$$

الدالة د = م².

3	2	1	0	م
0.4	0.3	0.2	0.1	ح(م)
9	4	1	0	د=م ²

جدول (3-6)

$$\text{ت(د)} = \text{ت(م}^2) = 0.1 \times 0 + 0.2 \times 1 + 0.3 \times 4 + 0.4 \times 9$$

$$= 0 + 0.2 + 1.2 + 3.6 = 5$$

نظرية : ليكن م متغير عشوائي ، أ ، ب عدنان ثابتان فإن

$$\text{ت(أ + ب)} = \text{أ ت(ب)} + \text{ت(أ)}$$

البرهان : من تعريف التوقع الرياضي لدالة المتغير العشوائي فإن

$$\text{ت(أ + ب)} = \sum_{j=1}^n (\text{أ} + \text{ب}_j) \text{ح(م}_j) = \sum_{j=1}^n \text{أ} \text{ح(م}_j) + \sum_{j=1}^n \text{ب}_j \text{ح(م}_j)$$

$$= \text{أ} \sum_{j=1}^n \text{ح(م}_j) + \sum_{j=1}^n \text{ب}_j \text{ح(م}_j) = \text{أ} + \sum_{j=1}^n \text{ب}_j \text{ح(م}_j)$$

نفك الأقواس

$$= \text{أس}1\text{ح}(س1) + \text{ب ح}(س1) + \text{أس}2\text{ح} - \text{س}2\text{ح} + \text{ب ح}(س2) + \dots + \text{أس}ن\text{ح}(س\text{ن}) + \text{ب ح}(س\text{ن})$$

$$= \text{أ}[\text{س}1\text{ح}(س1) + \text{س}2\text{ح}(س2) + \dots + 2\text{س}ن\text{ح}(س\text{ن})] + \text{ب ح}(س1) + \text{ب ح}(س2) + \dots + \text{ب ح}(س\text{ن})$$

$$= \text{أ.ت}(س) + \text{ب}$$

$$\text{لأن ت}(س) = \text{س}1\text{ح}(س1) + \text{س}2\text{ح}(س2) + \dots + \text{س}ن\text{ح}(س\text{ن})$$

$$\text{ح}(س1) + \text{ح}(س2) + \dots + \text{ح}(س\text{ن}) = 1$$

وهو المطلوب.

$$\text{مغال(6-25): إذا كان ت}(س) = 5 \text{ فأوجد قيمة ت}(4\text{س} + 3)$$

$$\text{الحل : ت}(4\text{س} + 3) = 4\text{ت}(س) + 3 \quad \text{بتطبيق النظرية أعلاه}$$

$$23 = 3 + 5 \times 4 =$$

نظرية : إذا كانت القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي س هي ت(س) = μ فإن

$$\text{ت}(س - \mu) = \text{صفر}.$$

البرهان : بتطبيق النظرية أعلاه وعلى اعتبار أن $\text{أ} = 1$ ، $\text{ب} = \mu$ فإن

$$\text{ت}(س - \mu) = \text{ت}(س) - \mu = \mu - \mu = \text{صفر وهو المطلوب}.$$

6-6-2 : تباين المتغير العشوائي س.

إن تباين المتغير العشوائي س سواء كان منفصلا أم متصلا والذي سنرمز له بالرمز

تبا(س) أو σ^2 يمكن إيجاده من العلاقة التالية.

$$\text{تبا}(س) = \text{ت}[(س-\mu)^2]$$

والانحراف المعياري والذي سنرمز له بالرمز $\sigma = \sqrt{\text{تبا}(س)}$

نظرية : إذا كانت القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي $\mu = \text{ت}(س)$ فإن تباين هذا المتغير العشوائي س

$$\text{تبا}(س) = \text{ت}(س^2) - \mu^2 = \text{ت}(س^2) - [\text{ت}(س)]^2$$

6-3 نظرية ذات الحدين وتوزيع ذات الحدين :

نظرية ذات الحدين : إن هذه عملت على حل مسائل رياضية لها حدين ومرفوعة لقوة نونية يصعب إيجاد مفكرتها كلما ازدادت قيمة القوة ن واستعين بهذه النظرية رياضياً لتأخذ الصورة

$$(أ + ب)^ن = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} . (أ)^{n-r} (ب)^r \text{ حيث } أ \text{ هو الحد الأول.}$$

وقد استعين بهذه النظرية لاستخدامها في توزيع ذات الحدين.

وعليه فإن توزيع ذات الحدين في الأصل كانت نظرية رياضية

* إذا كانت التجربة تختمل نتيجتين بحيث يمكن تسميتها إما حالة نجاح أو حالة فشل وسنرمز لاحتمال النجاح بالرمز ح واحتمال الفشل 1-ح.

وعند إجراء التجربة وتكرارها ن مرة فاذا رمزنا لعدد النجاحات بالرمز س فإن احتمال الحصول على نجاح معين يمكن إيجاده من العلاقة:

$$C(s) = \binom{n}{s} C(s-1) C(s-1)$$

حيث $s = 0, 1, 2, \dots, n$

خصائص المتغير العشوائي تنطبق عليه توزيع بيرنولي :

- (1) يمكن تقسيم الأحداث إلى نجاح أو فشل.
 - (2) الأحداث مستقلة أي حدوث الأول لا يؤثر على حدوث الأخرى.
 - (3) إذا كان احتمال النجاح C فإن احتمال الفشل $1-C$
 - (4) الأحداث تتكرر n من المرات.
 - (5) احتمال النجاح ثابت طيلة التجربة.
- * وان للمتغير العشوائي (s) الذي يحقق شروط تجربة بيرنولي له التوزيع الاحتمالي

$$C(s) = \binom{n}{s} C(s-1) C(s-1)$$

$s = 0, 1, 2, \dots, n$.

وهذا ما نسميه بتوزيع ذات الحدين .

مثال (6-25) : أسرة لديها خمسة أطفال فإذا كان المتغير العشوائي s يمثل عدد الذكور في الأسرة والمطلوب :

(1) هل المتغير العشوائي يحقق شروط تجربة ذات الحدين ثم أوجد الدالة الاحتمالية التي تحكم المتغير العشوائي.

(2) أوجد احتمال أن يكون لدى الأسرة ثلاثة أطفال ذكور.

(3) احتمال أن يكون للعائلة بين طفل ذكر وثلاثة أطفال ذكور.

(4) احتمال أن لا يكون للعائلة أطفال ذكور.

الحل : س = عدد الذكور في الأسرة.

$$C - 1 = C - \frac{1}{2}$$

(1) نعم تحقق الشروط والدالة الاحتمالية التي تحكم س هي :

$$C(s) = \binom{5}{s} \left(\frac{1}{2}\right)^s \left(\frac{1}{2}\right)^{5-s} \text{ حيث } s = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{ أي } 0 \leq s \leq 5$$

(2) احتمال أن يكون للعائلة ثلاثة أطفال ذكور هو:

$$C(s=3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 1 \times 2 \times 3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{23} = \frac{1}{32} \times 10 =$$

$$(3) C(1 \leq s \leq 3) = C(s=1) + C(s=2) + C(s=3) = \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} + \binom{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} + \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} = \frac{25}{32}$$

نجد أولا المعاملات.

$$10 = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 1 \times 2} = \binom{5}{2}$$

$$5 = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 1} = \binom{5}{1}$$

$$10 = \binom{5}{2} = \binom{5}{3}$$

ثم نكتب الاحتمالات المطلوبة.

$$\frac{25}{32} = \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} =$$

$$(4) C(s=0) = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-0} = \frac{1}{32} \text{ أي أن احتمال أن لا يكون للعائلة أطفال}$$

ذكور هو $\frac{1}{32}$.

مثال (6-26): في تجربة القاء قطعة نقود مرتين أوجد التوقع الرياضي للمتغير العشوائي الذي يمثل ظهور صورة وكذلك تباينه.

الحل: المتغير العشوائي س يأخذ القيم التالية:

$$س = 0, 1, 2$$

حيث أن: 0: تمثل عدد المرات لظهور الصورة وهو الصفر

1: تمثل ظهور الصورة مرة واحدة

2: تمثل ظهور الصورة مرتين

وعليه يكون المتغير العشوائي أخذ القيم التالية واحتمالاتها.

س	0	1	2
ح(س)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

وبتطبيق العلاقة أعلاه فإن:

$$ت(س) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 2 + \frac{2}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$$

$$ت(س)^2 = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{2}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 0 + \frac{2}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times 4 = \frac{2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{6}{4}$$

$$\therefore \text{تبا (س)} = ت(س)^2 - [ت(س)]^2 = \frac{6}{4} - (1)^2 = \frac{6}{4} - \frac{4}{4} = \frac{2}{4} = 0.5$$

تمارين عامة على الاحتمالات

س1: من الشكل جانبيا وبلاستفادة من البيانات التالية:

$$C(A_1) - C(A_2) - C(A_3) = \frac{1}{4}$$

$$C(A_4) - C(A_5) - C(A_6) = \frac{1}{8}$$

$$C(A_7) - C(A_8) = \frac{1}{16}$$

والمطلوب إيجاد ما يلي:

- | | | |
|------------------------|-----------------------|-----------------------|
| (1) $C(A_1)$ | (2) $C(\bar{A}_1)$ | (3) $C(A_1)$ |
| (4) $C(A_1 \cap A_2)$ | (5) $C(A_1 \cap A_2)$ | (6) $C(A_1 \cap A_2)$ |
| (7) $C(A_1 \cap A_2)$ | (8) $C(A_1 \cap A_2)$ | (9) $C(A_1 \cap A_2)$ |
| (10) $C(A_1 \cap A_2)$ | | |

س2: على فرض ان $C(A_1) = 0.3$ ، $C(A_2) = 0.5$ ، $C(A_1 \cap A_2) = 0.7$ اوجد ما يلي:-

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|--------------------|
| (1) $C(A_1 \cap A_2)$ | (2) $C(\bar{A}_1)$ | (3) $C(\bar{A}_2)$ |
| (4) $C(A_1 \cap A_2)$ | (5) $C(A_1 \cap A_2)$ | |
| (6) $C(A_1 \cap A_2)$ | (7) $C(A_1 \cap A_2)$ | |

س3: في تجربة القاء حجر النرد مرة واحدة اذا كانت الاحداث التالية:-

$A_1 = \{6, 1\}$ ، $A_2 = \{5, 3, 1\}$ اوجد ما يلي:

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|--------------|
| (1) $C(A_1 \cap A_2)$ | (2) $C(A_1 \cap A_2)$ | (3) $C(A_1)$ |
|-----------------------|-----------------------|--------------|

$$\begin{array}{lll}
 (4) \text{ح} ({}_2\bar{1}) & (5) \text{ح} ({}_2\bar{1}/1) & (6) \text{ح} ({}_2\bar{1}/2) \\
 (7) \text{ح} ({}_2\bar{1}/1\bar{1}) & (8) \text{ح} ({}_2\bar{1}/11) & (9) \text{ح} ({}_2\bar{1} \cap {}_1\bar{1}) \\
 (10) \text{ح} (\overline{{}_2\bar{1} \cap {}_1\bar{1}}) & (11) \text{حل الحدثان مستقلين} &
 \end{array}$$

س4: في تجربة القاء قطعة نقود منتظمة ثم حجر نر منتظم مرة واحدة اوجد الاحتمالات التالية:-

- 1- الحدث الذي يمثل ظهور كتابة على الوجه العلوي لقطعة النقود.
- 2- الحدث الذي يمثل ظهور العدد 3 على الوجه العلوي لحجر النرد.
- 3- الحدث الذي يمثل عدم ظهور العدد 3 على الوجه العلوي لحجر النرد.
- 4- الحدث الذي يمثل ظهور صورة على الوجه العلوي لقطعة نقود وعدد اقل من 3 على حجر النرد.
- 5- الحدث الذي يمثل ظهور كتابة على الوجه العلوي لقطعة نقود والعدد 4 او 6 على الوجه العلوي لحجر النرد.

س5: ليكن $F = \{أ_1، أ_2، أ_3، أ_4، أ_5، أ_6، أ_7\}$ وتكن احتمالات الاحداث البسيطة

معينة كما يلي: $\text{ح}(أ_1) = \text{ح}(أ_2) = \text{ح}(أ_6)$

$$\text{ح}(أ_3) = 2 \text{ح}(أ_2) = \frac{1}{2} \text{ح}(أ_1)$$

$$\text{ح}(أ_4) = \frac{1}{2} \text{ح}(أ_7) = \frac{1}{2} \text{ح}(أ_1)$$

اوجد $\text{ح}(أ_1)$ ، $\text{ح}(أ_2)$ ، $\text{ح}(أ_3)$ ، $\text{ح}(أ_4)$ ، $\text{ح}(أ_5)$ ، $\text{ح}(أ_6)$ ، $\text{ح}(أ_7)$

س6: اذا كانت $أ_1$ ، $أ_2$ ، $أ_3$ ثلاثة احداث معينة لقضاء عيني وكانت احتمالات

الوحدات كما يلي: $\text{ح}(أ_1) = 2 \text{ح}(أ_2)$ ، $\text{ح}(أ_3) = \frac{1}{2} \text{ح}(أ_1)$ اوجد

$$C(A_1), C(A_2), C(A_3), L(C \cap A_1), L(C \cap A_2), L(C \cap A_3)$$

س 7: سحب كرة عشوائيا من صندوق به 3 كرات بيضاء، 6 كرات حمراء، 8

زرقاء، 9 خضراء اوجد الاحتمالات التالية:-

1- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة بيضاء.

2- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة خضراء.

3- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة زرقاء.

4- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة حمراء.

5- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة اما حمراء او خضراء.

6- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة اما بيضاء او خضراء.

7- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة ليست خضراء او ليست بيضاء.

س 8: كيس به ثلاث كرات بيضاء، 2 صفراء، 4 حمراء، 5 زرقاء، سحب منه

كرتان عشوائيا احسب الاحتمالات التالية:-

1- كلا الكرتان زرقاوان

2- واحدة بالضبط زرقاء

3- على الاقل واحدة زرقاء.

$$س 9: اذا كان A_1, A_2 حدثان معينان وكان $C(A_1 \cap A_2) = \frac{5}{8}$$$

$$C(A_1) = \frac{1}{2}, C(A_2) = \frac{1}{3} احسب الاحتمالات التالية:$$

$$(3) C(\bar{A}_1)$$

$$(2) C(A_1)$$

$$(1) C(A_2), C(A_1 \cap A_2)$$

$$(6) C(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)$$

$$(5) C(\bar{A}_1 \cap A_2)$$

$$(4) C(A_1 \cap A_2)$$

الوحدة السابعة

الارتباط والانحدار

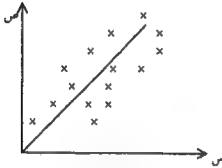
7-1) طريقة جداول الانتشار وعلاقتها بالارتباط

حتى نستطيع ان نتعرف على مفهوم الارتباط من خلال جداول الانتشار لا بد من التعرف اولاً على كيفية تكون جدول الانتشار ويتم من خلال الخطوات التالية.

- نرسم احدائين الافقي والرأسي حيث يمثل على المحور الافقي الظاهرة س وعلى المحور الرأسي الظاهرة ص.

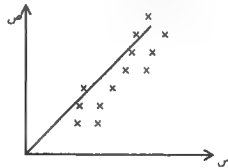
- نعين النقاط التي يمثل فيها الاحداثي السيني قيمة من قيم المتغير س والاحداثي الصادي قيمة من قيم المتغير ص.

- نحاول تحرير منحنى من اغلب النقاط بحيث يتوسط القيم ونلاحظ بعد توزيع النقاط الاشكال الانتشارية التالية:



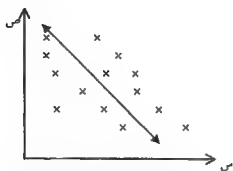
شكل (7-2)

نلاحظ تباعد المشاهدات عن الخط المستقيم مما يدل على أن العلاقة خطية طردية (موجبة) ولكنها ضعيفة



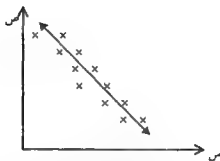
شكل (7-1)

نلاحظ تكثف المشاهدات حول الخط المستقيم مما يشير الى أن العلاقة خطية والارتباط ايجابي (طردي) قوي



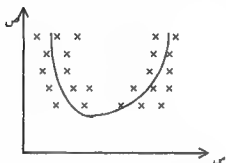
شكل (4-7)

نلاحظ تباعد المشاهدات عن الخط المستقيم مما يدل على أن العلاقة عكسية (سلبية) والعلاقة ضعيفة



شكل (3-7)

نلاحظ تكثف النقاط حول الخط المستقيم مما يشير إلى أن العلاقة عكسية (سلبية) والعلاقة قوية



شكل (6-7)

أما إذا اتخذ الشكل الانتشاري للشكل أعلاه فلنأخذ نقول أن العلاقة ليست خطية وإنما من الدرجة الثانية



شكل (5-7)

أما إذا اتخذ الشكل الانتشاري للشكل أعلاه نقول أنه لا يوجد علاقة بين المتغيرين س، ص

ومن خلال الأشكال سالفة الذكر نلاحظ أننا عبرنا عن العلاقة بين المتغيرين ونوعها وأننا استطعنا أن نعبر عن القوة أو الضعف للعلاقة من خلال جداول الانتشار.

2-7) معامل الارتباط وخصائصه

كما أسلفنا بأنه يمكن التعبير عن العلاقة بين المتغيرين بمقياس هو معامل الارتباط والذي سنرمز له بالرمز (ر) ويأخذ قيمة عددية تتراوح بين $-1 \leq r \leq 1$ وإذا وجد قيمة أكبر أو أصغر من هذه الحدود دلالة على أن هناك خطأ حسابي قد حصل،

وللمعامل دلالات نوردتها في ما يلي لتفسير العلاقة بين المتغيرين.

(1) اذا كانت $r = -1$ فان العلاقة بين المتغيرين تكون عكسية تامة.

(2) اذا كانت $-1 < r < 0$ فان العلاقة تكون علاقة عكسية.

(3) اذا كانت $r = 0$ صفر، فهذا يعني انه لا وجود لأي علاقة بين المتغيرين r ، ص.

(4) اذا كانت $0 < r < 1$ فهذا يعني انه يوجد علاقة ايجابية تقوى كلما اقتربنا من

الواحد صحيح.

(5) عندما تكون $r = 1$ فان العلاقة تكون علاقة تامة ايجابية.

7-2-1) معامل ارتباط بيرسون

لايجاد معامل الارتباط باستخدام طريقة بيرسون نتبع الخطوات التالية:

- نجد $\sum x$ ، $\sum y$

- نجد $\sum x^2$ أي مربع كل مشاهدة من x ثم المجموع.

- نجد $\sum y^2$ أي مربع كل مشاهدة في y

- نجد معامل الارتباط من العلاقة

$$r = \frac{\frac{\sum_{j=1}^n x_j \times \sum_{j=1}^n y_j}{n} - \frac{\sum_{j=1}^n x_j \times \sum_{j=1}^n y_j}{n}}{\sqrt{\left(\frac{\sum_{j=1}^n x_j^2}{n} - \frac{(\sum_{j=1}^n x_j)^2}{n} \right) \left(\frac{\sum_{j=1}^n y_j^2}{n} - \frac{(\sum_{j=1}^n y_j)^2}{n} \right)}}$$

(1-7).....

مثال (1-7): اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية للمتغيرين س، ص كما في الجدول (1-7)

س	1	2	3	4	5	المجموع
ص	3	6	9	12	15	45

جدول (1-7)

المطلوب: إيجاد معامل الارتباط باستخدام معامل ارتباط بيرسون.

الحل: نشكل جدول الحل (2-7) والذي يحوي جميع الحسابات المطلوبة للحل.

الرقم	س	ص	س ص	س ²	ص ²
1	1	3	3	1	9
2	2	6	12	4	36
3	3	9	27	9	81
4	4	12	48	16	144
5	5	15	75	25	225
المجموع	15	45	165	55	495

جدول (2-7)

من البيانات اعلاه نجد قيمة ر

$$r = \frac{\frac{45 \times 15}{5} - 165}{\sqrt{\left(\frac{45 \times 45}{5} - 495\right) \left(\frac{15 \times 15}{5} - 55\right)}} = \frac{135 - 165}{\sqrt{(405 - 495)(45 - 55)}} = \frac{-30}{\sqrt{900}} = \frac{-30}{30} = -1$$

ر=1 أي أن الارتباط ارتباط إيجابي تام

مثال (2-7) : البيانات التالية تمثل قيم س، ص مرتبة في الجدول (3-6)

المجموع						
26	7	5	4	7	3	س
30	8	6	8	6	2	ص

جدول (3-7)

المطلوب إيجاد معامل الارتباط لهذه البيانات

الحل: نكون الجدول (4-6) والمحتوي على البيانات المطلوبة لحل السؤال

الرقم	س	ص	س ص	س ²	ص ²
1	3	2	6	9	4
2	7	6	42	49	36
3	4	8	32	16	64
4	5	6	30	25	36
5	7	8	56	49	64
المجموع	26	30	166	148	204

جدول (4-7)

من البيانات اعلاه نجد قيمة ر من العلاقة

$$r = \frac{\frac{30 \times 26}{5} - 166}{\sqrt{\left(\frac{30 \times 30}{5} - 204\right)\left(\frac{26 \times 26}{5} - 148\right)}} = \frac{156 - 166}{\sqrt{(180 - 204)(135.2 - 148)}} = \frac{-10}{\sqrt{307.2}} = \frac{-10}{17.53} = -0.57$$

أي ان الارتباط بين المتغيرين س، ص انجاسي (طردى) متوسط

مثال (3-7): البيانات التالية تمثل قيم المتغيرين س ، ص كما في الجدول (5-7) .

المجموع						
س	4	7	9	12	15	47
ص	11	9	5	4	2	31

جدول (5-7)

المطلوب إيجاد معامل الارتباط بين المتغيرين س، ص

الحل: نشكل الجدول (6-7) والمحتوي على جميع البيانات المطلوبة للحل

الرقم	س	ص	س ص	س ²	ص ²
1	4	11	44	16	121
2	7	9	63	49	81
3	9	5	45	81	25
4	12	4	48	144	16
5	15	2	30	225	4
المجموع	47	31	230	515	247

جدول (6-7)

من البيانات اعلاه نطبق العلاقة

$$r = \frac{\frac{31 \times 47}{5} - 230}{\sqrt{\frac{2914 - 230}{(192.2 - 247)(441.8 - 515)}}} = \frac{\frac{31 \times 31}{5} - 247}{\sqrt{\left(\frac{31 \times 31}{5} - 247\right)\left(\frac{47 \times 47}{5} - 515\right)}} = \frac{61.4 - 54.8}{\sqrt{4011.36 \times 73.2}} = \frac{6.6}{54.8} = 0.12$$

وهذا ارتباط سلبي قوي

7-2-2) إيجاد معامل الارتباط بطريقة الانحراف المعياري

لإيجاد معامل الارتباط بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية :

$$- \text{نجد } \sum (ص - \bar{ص})(ع - \bar{ع})$$

- نجد $\bar{ع}$ ثم $\bar{ص}$ أو قد تكون في بعض الاسئلة معطاة

- نجد معامل الارتباط من العلاقة التالية.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{ص} - ص_i)(\bar{ع} - ع_i)}{n \cdot \bar{ع} \cdot \bar{ص}} \quad (2-7)$$

مثال (7-4): من البيانات المعطاة ادناه اوجد معامل الارتباط اذا كان:

$$\sum_{i=1}^n (\bar{ص} - ص_i)(\bar{ع} - ع_i) = 47, \quad \bar{ع} = 16, \quad \bar{ص} = 5 \text{ حيث } n=5.$$

$$\text{الحل: نطبق العلاقة } r = \frac{47}{5 \times 16} \cdot \frac{1}{5} = \frac{47}{400}$$

∴ $r = 0.12$ وهذا ارتباط ايجابي ضعيف.

7-2-3) معامل ارتباط سبيرمان للترتيب:

كثيرا ما يستعمل هذا المعامل في البيانات الوصفية التي يستحيل عندها استخدام البيانات العددية بطريقة بيرسون وكذلك ايضا يستخدم في البيانات الرقمية لتسهيل العمليات الحسابية. لذا نلجأ لتحويل البيانات الوصفية الى عددية قابلة للحل.

ولاستخدام هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية.

- نجد ترتيبات البيانات المعطاة سواء كانت وصفية او رقمية لكل من المتغيرين $ص$ ، $ع$ ونرمز لهما بالرموز $ص'$ ، $ع'$.

- نجد $د = ص' - ع'$ أي نجد الفرق بين الترتيب المناظرة.

- نأخذ مربع ف ونطبق العلاقة :

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n f_i^2}{n} - 1$$

(3-7).....

مثال (5-7) : البيانات التالية تعطي تقادير عشرة موظفين في احدى الشركات

وكانت مرتبة كما في الجدول (7-7)

س(الأول)	جيد	جيد جدا	مقبول	جيد جدا	جيد	ممتاز	ممتاز	ضعيف	مقبول	جيد جدا
ص(الثاني)	مقبول	ممتاز	ضعيف	ممتاز	جيد جدا	جيد جدا	جيد	مقبول	جيد	جيد

جدول (7-7)

الحل: نشكل الجدول (8-7) يشمل جميع البيانات المطلوبة للحل.

الرقم	س	ص	س	ص	ف-س-ص	ف ²
1	جيد	مقبول	6.5	8.5	2-	4.00
2	جيد جدا	ممتاز	4	1.5	2.5	6.25
3	مقبول	ضعيف	8.5	10	1.5	2.25
4	جيد جدا	ممتاز	4	1.5	2.5	6.25
5	جيد	جيد جدا	6.5	3.5	3	9.00
6	ممتاز	جيد جدا	1.5	3.5	2-	4.00
7	ممتاز	جيد	1.5	6	4.5-	20.25
8	ضعيف	مقبول	10	8.5	1.5	2.25
9	مقبول	جيد	8.5	6	1.5	2.25
10	جيد جدا	جيد	4	6	2-	4.00
المجموع						60.50

جدول (8-7)

- ترتيب التقادير اعلاه كما ورد في س، ص

- نجد $f = s - s_v$

- نجد مربع الفروق والمجموع أي $\sum_{i=1}^n f_i^2$

- ثم نطبق العلاقة

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n 6 f_i^2}{n(1-2)} - 1 = \frac{60.5 \times 6}{(1-100)10} - 1 = \frac{363}{990} - 1 = 0.63 - 1 = -0.37$$

وهذا يدل على ان الارتباط جيد

ملاحظات على الحل.

- عندما كان لدينا قيم متكررة كنا نأخذ ترتيب كل قيمة متكررة التصاعدي ثم نجمع هذه الترتيب ونأخذ متوسطها الحسابي فيكون هو ترتيب كل قيمة في s_v .
فمثلاً عند ترتيب قيم s لاحظنا ان التقدير ممتاز تكرر مرتين كان ترتيبهما التصاعدي 1، 2 فيكون الترتيب لكل تقدير هو $\frac{2+1}{2} = 1.5$ فيوضع في عمود s_v العدد 1.5 امام التقادير ممتاز وهكذا نضع قيم s_v لباقي التقادير.

مثال (7-6): البيانات التالية تمثل درجات 10 طلاب في مبحثي الاحصاء

والرياضيات وهي كما في الجدول (7-9)

87	75	60	90	88	80	95	90	75	85	درجة الاحصاء s
83	70	65	85	72	80	75	75	85	80	درجة الرياضيات s_v

جدول (7-9)

اوجد معامل ارتباط سبيرمان

الحل: نكون الجدول (7-10) والذي يحتوي على جميع البيانات المطلوبة

درجة الاحصاء (س)	درجة الرياضيات (ص)	رتبة س ص	رتبة ص ص	ف ص ص	ف ²
85	80	6	5.5	0.5	0.25
75	85	8.5	2	6.5	42.25
90	85	2.5	2	0.5	0.25
95	75	1	7	6.0-	36.00
80	80	7	5.5	1.5	2.25
88	72	4	8	4-	16.00
0	85	2.5	2	0.5	0.25
60	65	10	10	صفر	صفر
75	70	8.5	9	0.5-	0.25
87	83	5	4	1	1.0
					98.5

جدول (7-10)

بعد إيجاد هذه البيانات نطبق العلاقة التالية

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n 6f_i^2}{n(1-2)} - 1$$

$$0.4 = 0.6 - 1 = \frac{591}{990} - 1 = \frac{98.5 \times 6}{(1-100)10} - 1 =$$

∴ الارتباط بين المتغيرين س، ص ضعيف وهذه الطريقة تسمى طريقة سبيرمان للترتيب.

الانحدار

(3-7) مفهوم الانحدار:

هو إيجاد معادلة رياضية تعبر عن العلاقة بين المتغيرين س، ص نستعمل للتنبؤ عن قيم سابقة وقيم مستقبلية ل ص. او س حسب المعلوم منهما وتكون هذه المعادلة الرياضية خطية ، وقد تكون بدرجة ثانية أو ثالثة ولكن سنتناول هنا الخطية منها فقط وتكون بصورتين.

أ) اذا كان الانحدار من ص على س فان للمعادلة هي

(4-7).....

$$\text{ص} = \text{أ} \cdot \text{س} + \text{ب}$$

المطلوب هو التعرف على قيم أ، ب لصياغة المعادلة ونسمي أ: معامل الانحدار او ميل خط الانحدار، وهو قيمة تقديرية، ب= هو نقطة تقاطع خط الانحدار مع المحور الرأسي ويمكن إيجاد قيم أ. ب من العلاقتين

(5-7).....

$$\text{أ} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n \text{ص} \cdot \text{س}}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n \text{ص}}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \text{س}}{n}}{\frac{\sum_{i=1}^n \text{س}^2}{n} - \frac{(\sum_{i=1}^n \text{س})^2}{n}}$$

ولايجاد ب نجد ها من العلاقة

(6-7)

$$\text{ب} = \bar{\text{ص}} - \text{أ} \cdot \bar{\text{س}}$$

حيث $\bar{\text{س}}$ ، $\bar{\text{ص}}$ هما المتوسط الحسابي للظاهرة س، الظاهرة ص.

ب) معادلة انحدار س على ص فاننا نكون المعادلة التالية :

(7-7).....

$$\text{س} = \text{أ} \cdot \text{ص} + \text{ب}$$

ولايجاد قيم أ، ب من العلاقتين :

(9-7).....

$$\frac{\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n r \cdot s}{n} = 1$$

$$\frac{\sum_{r=1}^n \left(\sum_{s=1}^n r \right)^2}{n} = 2$$

(10-7).....

$$\boxed{b = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}$$

7-3 ولايجاد العلاقة الرياضية بين معاملي الانحدار ومعامل الارتباط فاننا نجد كما يلي:

(10-7).....

$$\boxed{r = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n}} \quad \text{أو} \quad \boxed{r = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n}}$$

ولتوضيح المفاهيم السابقة نورد الامثلة التالية:

مثال (7-7): البيانات التالية تمثل اجور ونفقات خمسة عمال من عمال شركة ما

مرتبة في الجدول (7-11)

25	20	18	15	20	اجور اسبوعية س
20	15	18	14	15	نفقات اسبوعية ص

جدول (7-11)

والمطلوب ايجاد .

(أ) معامل ارتباط بيرسون

(ب) معادلة انحدار ص/س أي انحدار ص على س باستخدام القانون العام.

(ج) معادلة انحدار س/ص أو س على ص.

(د) معامل الارتباط من معامل انحدار ص على س ، س على ص ثم قارن نتيجة د مع نتيجة أ.

(هـ) اوجد نفقات عامل ما اذا كان مرتبة 40 دينار .

الحل: نكون الجدول (12-7) الذي يشمل جميع البيانات المطلوبة للحل

اجور اسبوعية	نفقات المئوية ص	س ص	س ²	ص ²
20	15	300	400	225
15	14	210	225	196
18	18	324	324	324
20	15	300	400	225
25	20	500	625	400
المجموع	98	1634	1974	1370

جدول (12-6)

(أ) نجد معامل ارتباط بيرسون من العلاقة (1-7)

$$\frac{82 \times 98}{5} - 1634$$

$$\sqrt{\left(\frac{82 \times 82}{5} - 1370\right)\left(\frac{98 \times 98}{5} - 1974\right)}$$

$$1607.2 - 1634$$

$$\sqrt{(1344.8 - 1370)(1920.8 - 1974)}$$

$$\frac{26.8}{36.61} = \frac{26.8}{1340.64} = \frac{26.8}{25.2 \times 53.2}$$

= 0.73 وهذا معامل ارتباط قوي نوعا ما.

(ب) لايجاد معادلة انحدار ص على س نجد

$$\frac{\frac{98 \times 98}{5} - 1634}{\frac{98 \times 98}{5} - 1974} = 1$$

$$0.5 = 1 \Leftrightarrow 0.5 = \frac{26.8}{53.2} = \frac{1607 - 1634}{1920.8 - 1974} =$$

ولايجاد ب نجدها من العلاقة ب = ص - أن لنا نجد أولاً الوسط الحسابي لكل من

المتغيرين س ، ص

$$\bar{ص} = 19.6 ، \bar{ص} = 16.4$$

نجد قيمة ب من العلاقة

$$ب = \bar{ص} - \bar{أ} = 16.4 - 19.6 \times 0.5 = 16.4 - 9.80 = 6.6 +$$

∴ معادلة الخط ص/س تصبح على الصورة.

$$ص = 0.5 س + (6.6) = 0.5 س + 6.6$$

جـ) ولايجاد معادلة الخط ص/س على ص نجد أولاً

$$1.06 = \frac{26.8}{25.2} = \frac{1607.2 - 1634}{1344.8 - 1370} = \frac{\frac{82 \times 98}{5} - 1634}{\frac{82 \times 82}{5} - 1370} = 1$$

∴ $1.06 = 1$ ثم نجد ب من العلاقة

$$ب = \bar{ص} - \bar{أ} = 19.6 - 16.4 \times 1.06 =$$

$$2.22 = 19.6 - 17.380 =$$

∴ المعادلة المطلوبة تكون

$$ص = 1.06 س + (2.22) \Leftrightarrow ص = 1.06 س + 2.22$$

د) نجد معامل الارتباط من العلاقة

$$r^2 = 1 - \frac{1}{n} \sum x_i^2 \text{ واصبح لدينا معلوماً كل من } \bar{x} \text{ و } \bar{y}$$

$$r^2 = 1 - 0.5 \times 0.06$$

$$r = \sqrt{0.53} \text{ فيكون معامل الارتباط } r = 0.73$$

$$r = 0.73$$

نلاحظ ان الجواب الذي حصلنا عليه بطريقة بيرسون هو نفس الجواب الذي حصلنا عليه بهذه الطريقة.

هـ) نستطيع التنبؤ عن الجواب من العلاقة

$$ص = 0.5س + 6.6 \text{ ونعوض عن س بالقيمة المعطاة}$$

$$ص = 0.5س + 6.6 = 6.6 + 20 = 26.6 \text{ دينار وهو المطلوب}$$

ايجاد معادلة انحدار ص على س باستخدام المربعات الصغرى

$$\text{الصورة العامة لمعادلة انحدار ص على س } ص = م س + ح$$

$$\sum ص = م \sum س + n ح \quad \text{بأخذ المجموع لجميع الأطراف}$$

$$82 = 98م + 5 ح \quad (1)$$

$$ص = م س + ح \text{ نضرب جميع أطراف المعادلة الأصلية في س}$$

$$\sum ص س = م \sum س^2 + ح \sum س$$

$$1634 = 1974م + 98 ح$$

$$82 = 98م + 5 ح \quad (2)$$

$$8170 = 9870م + 490 ح$$

$$\pm 8036 = \pm 9604م \pm 490 ح \quad \text{بالطرح}$$

$$134 = 266م$$

$$م = \frac{134}{0.5} = 266$$

وبالتعويض عن م في أي من المعادلات ولتكن معادلة (1)

$$ج5 + 0.5 \times 8 = 82$$

$$ج5 = 82 - 49$$

$$ج5 = 33 \Leftarrow \frac{33}{5} = 6.6$$

∴ معادلة المنحدار ص على س هي

$$ص = 0.5س + 6.6$$

أمثلة إضافية

مثال (7-8): الجدول (6-13) يمثل معدل درجات خمسة طلاب في المرحلة الثانوية

ومعدلاتهم في السنة الأولى في الكلية

65	82	64	72	85	معدل الثانوية (س)
67	71	73	81	91	معدل السنة الأولى (ص)

جدول (7-13)

والمطلوب

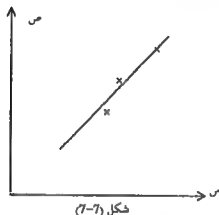
- (1) رسم لوحة الانتشار للمتغيرين س، ص
- (2) إيجاد معامل الارتباط بطريقتين
- (3) أوجد معامل الارتباط من العلاقة التي تربط الارتباط بالانحدار.
- (4) قدر معدل أحد الطلاب في الثانوية العامة إذا كان معدله في السنة الأولى 88.
- (5) قدر معدل طالب في السنة الأولى إذا كان معدله في الثانوية العامة 76.

الحل: نكتب جدول الحل (7-14).

س	ص	س ²	ص ²	س رتبة س	ص رتبة ص	ف	ف ²
85	91	7225	8281	1	1	0	0
72	81	5184	6561	3	2	1	1
64	73	4672	5329	5	3	2	4
82	71	5822	5041	2	4	2-	4
65	67	4355	4489	4	5	1-	1
368	383	28416	34190				10

جدول (7-14)

(1) نبدأ برسم لوحة الانتشار



والخط المبين يمر باغلب النقاط

شكل (7-7)

(2) أ- معامل ارتباط بيرسون نحده من العلاقة التالية

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n \text{س}_i \text{ص}_i - \frac{\sum_{i=1}^n \text{س}_i \sum_{i=1}^n \text{ص}_i}{n}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \text{س}_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \text{س}_i \right)^2}{n} \right) \left(\sum_{i=1}^n \text{ص}_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \text{ص}_i \right)^2}{n} \right)}}$$

$$\frac{28188.8 - 28416}{(29337.8 - 27084.8 - 27454)} \sqrt{\frac{\frac{383 \times 368}{5} - 28416}{\left(\frac{383 \times 383}{5} - 29701\right) \left(\frac{368 \times 368}{5} - 27454\right)}} =$$

$$0.62 = \frac{227.2}{366.1} = \frac{227.2}{363.2 \times 369.2}$$

ب- نجد معامل ارتباط سبيرمان كطريقة اخرى.

$$0.50 = 0.5 - 1 = \frac{60}{120} - 1 = \frac{10 \times 6}{24 \times 5} - 1 = \frac{\sum_{r=1}^6 r^3}{(1-2)^n} - 1 = r$$

3) ان معادلة خط انحدار ص على س هي

$$ص = أ س + ب.$$

واذا تحديد كل من أ، ب يتم إيجاد المعادلة المطلوبة . ولتتم ذلك نجد أ من العلاقة

$$0.62 = \frac{227.2}{369.2} = \frac{\sum_{r=1}^n ص_r \sum_{r=1}^n س_r}{\sum_{r=1}^n ص_r} = \frac{\left(\frac{\sum_{r=1}^n \left(\sum_{r=1}^2 \right)}{n} \right)^2 \sum_{r=1}^n}{\left(\frac{\sum_{r=1}^2}{n} \right)^2 \sum_{r=1}^n} = 1$$

نجد ب من العلاقة ب= ص - أ س =

$$31 = 45.6 - 76.6 = 73.6 \times 0.62 - 76.6 =$$

المعادلة المطلوبة هي ص = 0.62 س + 31

أما معادلة انحدار س على ص فهي كما يلي :

س = أص + بَ وبإيجاد الثوابت أ، بَ نصل الى المعادلة المطلوبة نجد أ من العلاقة التالية

$$0.63 = \frac{227.2}{363.3} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{ص}_i \text{ص}_j}{\sum_{i=1}^n \text{ص}_i} = \frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \text{ص}_j \right)}{n} \right)^2 - \sum_{i=1}^n \text{ص}_i^2}{n}$$

نجد من العلاقة بَ = صَ - أَ وبالتعويض عن القيم المعطاة

$$بَ = 25.3 = 48.3 - 73.6 = 76.6 \times 0.63 - 73.6$$

ونكون المعادلة المطلوبة س = أص + 0.63ص + 25.3

جـ) لإيجاد معامل الارتباط من العلاقة

$$0.621 = \sqrt{0.63 \times 0.62} = \sqrt{أ \times ب}$$

5) لتقدير المعدل في الثانوية العامة نعوض في المعادلة س/ص.

$$س = 80.74 = 25.36 + 55.44 = 25.3 + 88 \times 0.63$$

6) لتقدير المعدل في السنة الأولى نعوض في معادلة ص/س.

$$ص = 78.12 = 31 + 76 \times 0.62$$

تمارين عامة على الوحدة السابعة

1- البيانات التالية تمثل ارقام المشاهدات س، ص كما في الجدول التالي

س	2	5	7	10	12	13	15
ص	4	10	14	20	24	26	30

والمطلوب: إيجاد نوع الارتباط بين المتغيرين مع ذكر نوعه ووصفه.

2- أوجد معامل ارتباط بيرسون لقيم المشاهدات المبوبة في الجدول التالي.

س	14	8	10	12	14	16
ص	12	8	7	5	3	1

3- من البيانات المرتبة بالجدول.

س	2	6	8	10	12	14
ص	1	2	3	4	5	6

والمطلوب (1) إيجاد معامل ارتباط بيرسون

(2) إيجاد معامل ارتباط سيرمان للرتب.

4- من البيانات المعطاة

$$\sum_{\text{س}} \text{س} = 85, \sum_{\text{س}} \text{س}^2 = 20, \sum_{\text{ص}} \text{ص} = 30, \sum_{\text{ص}} \text{ص}^2 = 5, \sum_{\text{س}} \text{س} \cdot \text{ص} = 165, \sum_{\text{ص}} \text{ص}^2 = 200$$

أوجد معامل الارتباط للمتغيرين بطريقة بيرسون.

5- من البيانات التالية أوجد معامل ارتباط سيرمان للرتب اذا كان $\sum \text{ف}^2 = 55.5, \text{ن} = 6$

س6: في ماييلي علامات مجموعة مؤلفة من 5 طلاب في امتحاني الرياضيات والاحصاء س، ص على التوالي.

س	86	68	74	80	62
ص	80	65	75	75	65

المطلوب: (1) حساب معامل ارتباط بيرسون (2) معامل ارتباط سيرمان.

(3) معادلة الانحدار ص=أ+ب س (4) اذا علم ان احد الطلبة قد حصل علامة (78) في الرياضيات أوجد علامة الطالب في الاحصاء.

(5) إيجاد علامة الطالب في الرياضيات اذا كانت علامته في الاحصاء هي 60.

(6) رسم شكل الانتشار بناءً على المشاهدات

(7) رسم خط الانحدار .

(8) تفسر معاملي أ، ب.

الفصل الثامن

السلاسل الزمنية

(1-8) تمثيل السلاسل الزمنية

السلسلة الزمنية : مجموعة مشاهدات حول ظاهرة معينة أخذت بترتيب زمني معين عادة ما يكون هذا الترتيب فيه تساوي الفترات الزمنية مثل الساعات، الايام، الاشهر، او السنوات المتتالية.

امثلة متنوعة على السلاسل الزمنية.

* المبيعات اليومية في مركز بيع الكتب لمدة شهر.

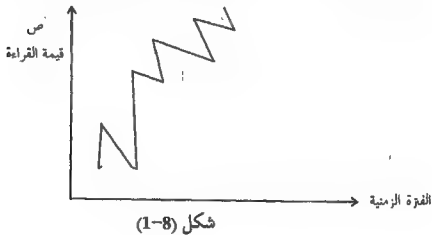
* قراءة درجات حرارة المريض في ساعة لمدة يوم واحد.

* قراءات الانتاج الشهري لمدة سنة في شركة الادوية العربية.

* الانتاج الشهري من البترول لدولة الكويت ولعدة سنوات.

كل هذه القراءات وتتابعها الزمني جميعها تمثل سلسلة زمنية.

ويمكن تمثيلها بيانياً لأن كل قراءة تمثل زوجاً من النقاط كما في شكل (1-8)



2-8) معامل الخشونة والمعدلات المتحركة

1-2-8 معامل الخشونة :

في هذا البند يبرز سؤال وهو ما المقصود من تحليل السلسلة الزمنية؟ وللإجابة نقول بان المقصود من تحليل السلسلة الزمنية هو.

(1) معرفة التغيرات التي تطرأ على السلسلة خلال الفترات المتساوية التي اخذت عندها قراءة المشاهدات.

(2) معرفة طبيعة العلاقة بين الظاهرة قيد الدراسة والظواهر الاخرى ولعل رسم منحنى السلسلة يمكن ان يبرز جانب من هذه الفوائد لعملية تحليل السلسلة الزمنية.

(3) معرفة ماضي الظاهرة وكيفية تغيرها.

(4) التنبؤ بمستقبل الظاهرة قيد الدراسة مما تفيد لاتخاذ قرار معين وعند اجراء عملية التحليل للسلسلة اول عمل نقوم به رسم المنحنى البياني لقيم المشاهدات مع الزمن ونعين النقاط وبعد تعيين النقاط ورسم هذا المنحنى يبرز لنا تعرجات كبيرة في المنحنى وهذه التعرجات تجمعنا نطلق على السلسلة بانها خشنة ونستطيع قياس مدى الخشونة من خلال إيجاد معامل نسميه بمعامل الخشونة نحدد من العلاقة التالية:

$$\text{معامل الخشونة} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (1-8)$$

وكلما كان هذا الرقم قليلاً كلما كانت السلسلة ملساء.

ولتوضيح هذا المفهوم نورد المثال التالي

مثال (1-8): احسب معامل الخشونة للسلسلة التالية 7 ، 9 ، 14 ، 15 ، 20 ، 19

الحل: لحساب معامل الخشونة نكون جدول الحل (1-8).

ن	م _ر	م _ر -1	م _ر -م _{ر-1} ²	م _ر -م _ق	(م _ر -م _ق) ²
1	7	-	-	-	-
2	9	7	2	5-	25
3	14	9	5	0	0
4	15	14	1	1	1
5	20	15	5	6	36
6	19	20	1-	5	25
ع					87
					56

جدول (1-7)

$$14 = \frac{84}{6} = \frac{19+20+15+14+9+7}{6} = \text{م_ق المتوسط الحسابي}$$

ثم نجد معامل الخشونة من العلاقة الرياضية التالية.

$$0.64 = \frac{56}{87} = \frac{\sum_{r=1}^n (m_r - m_{r-1})^2}{\sum_{r=1}^n (m_r - m_{\text{ق}})^2} = \text{معامل الخشونة}$$

8-2-2؛ طريقة المعدلات المتحركة:

إن أهمية المعدلات المتحركة تبرز في أنها تعمل على الحد من خشونة السلسلة وجعلها

ملساء ولايجاد المعدلات المتحركة لابد من اتباع الخطوات التالية

(أ) في حالة ما اذا كان المتوسط فردياً أي ان ل=3، 5، 7،، ل= طول المعدل

نحدد القراءة الاولى عندما كان الزمن صفراً ونرمز لها بالرمز ص والقراءة الثانية ص1،

وهكذا تتكون السلسلة كما في جدول (8-2).

الزمن	0	1	2	3	1-ن
قيمة الملاحظة صر	ص ₀	ص ₁	ص ₂	ص ₃		ص 1-ن

جدول (2-8)

* نرسم لقيم المعدلات المتحركة بالرمز صر

* نحدد موقع المعدل المتحرك الاول من العلاقة التالية:

$$\text{موقع المعدل الاول} = \frac{\text{طول المعدل} + 1}{2} = \frac{1 + \text{ل}}{2} \quad (2-8) \dots\dots\dots$$

مثال (2-8): اذا كان طول المعدل 3 لسلسلة زمنية فان موقع المعدل

$$\text{الاول} = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ أي انه يقابل الملاحظة الثانية في السلسلة.}$$

مثال (3-8): اذا كان طول المعدل 5 لسلسلة زمنية فان موقع المعدل

$$\text{الاول} = \frac{1+5}{2} = 3 \text{ أي انه يقابل الملاحظة الثالثة في السلسلة. وهكذا}$$

* بعد تحديد موقع المعدل الاول نلجأ الى تعيين قيمة المعدل نفسه وعلى سبيل المثال

اذا كان لدينا الطول 3 وقيم المشاهدات ص₀ ، ص₁ ، ، ص_{1-ن} فان موقع للمعدل

$$\text{الاول ص}_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ أي مقابل الملاحظة الثانية.}$$

$$\text{وقيمة هذا المعدل} = \frac{\text{ص}_0 + \text{ص}_1 + \text{ص}_2}{3}$$

المشاهدة السابقة للمعدل + المشاهدة المقابلة للمعدل + المشاهدة اللاحقة للمعدل

3

$$\hat{\text{ص}}_2 = \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3}{3}$$

ثم نجد

$$\hat{\text{ص}}_3 = \frac{\text{ص}_2 + \text{ص}_3 + \text{ص}_4}{3}$$

وعند كتابة جدول يشمل قيم المشاهدات والمعدلات المتحركة المقابلة لها كما في الجدول (3-8).

الزمن د	0	1	2	3	4	2-ن	1-ن
المشاهدات صر	ص ₀	ص ₁	ص ₂	ص ₃	ص ₄	ص 2-ن	ص ₁ -د
التوسطات للمتحركة ص	-	ص ₁	ص ₂	ص ₃	ص ₄	..	ص _ن 1-ن	-

جدول (3-8)

ملاحظات:

- 1) نلاحظ ان ص₀ لم يقابلها معدل متحرك لانه لم يسبقها اية مشاهدة.
 - 2) ص₁-د لم يقابلها معدل متحرك وهكذا بالنسبة لباقي الاطوال الفردية
- مثال (3-8): اوجد المعدلات المتحركة بطول 3 للسلسلة الزمنية

7، 11، 8، 19، 25، 14، 20.

الحل: نرتب قيم المشاهدات في جدول زمني كما هو مبين ادناه في جدول (4-8).

ص ₀	ص ₁	ص ₂	ص ₃	ص ₄	ص ₅	ص ₆	
0	1	2	3	4	5	6	الزمن د
7	11	8	19	25	14	20	المشاهدات صر
-	8.67	12.67	17.33	19.33	19.67	-	المعدلات صر

جدول (4-8)

نحدد موقع المعدل المتحرك الاول = $\frac{1+3}{2} = 2$ مقابل ص₁ = 11

$$\text{نجد: } \hat{\text{ص}}_1 = \frac{\text{ص}_0 + \text{ص}_1 + \text{ص}_2}{3} = \frac{7+11+8}{3} = \frac{26}{3} = 8.67$$

$$12.67 = \frac{1+8+11}{3} = \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3}{3} = \text{ص}_2$$

$$17.33 = \frac{25+1+8}{3} = \frac{\text{ص}_4 + \text{ص}_3 + \text{ص}_2}{3} = \text{ص}_3$$

$$19.33 = \frac{14+25+19}{3} + \frac{\text{ص}_5 + \text{ص}_4 + \text{ص}_3}{3} = \text{ص}_4$$

$$19.67 = \frac{20+14+25}{3} = \frac{\text{ص}_6 + \text{ص}_5 + \text{ص}_4}{3} = \text{ص}_5$$

مثال (4-8): اوجد المعدلات المتحركة بطول 5 للسلسلة الزمنية

7، 13، 21، 23، 27، 19، 17.

الحل: نرتب البيانات التالية في الجدول (5-8).

الزمن	0	1	2	3	4	5	6
الملاحظات صرر	7	13	21	23	27	19	17
المعدلات صرر	-	-	18.2	20.6	21.4	-	-

جدول (5-8)

$$\text{نجد ترتيب المشاهدة المقابلة للمعدل الاول} = \frac{1+5}{2} = 3.$$

فيكون ترتيب المشاهدة الثالثة هي المقابلة لاول معدل متحرك.

- نجد قيمة المعدل المتحرك من العلاقة

$$\frac{\text{ص}_0 + \text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3 + \text{ص}_4}{5} = \hat{\text{ص}}_2$$

$$18.2 = \frac{91}{5} = \frac{27+23+21+13+7}{5} = \hat{\text{ص}}_2$$

$$20.6 = \frac{103}{5} = \frac{19 + 27 + 23 + 21 + 13}{5} = \frac{ص_1 + ص_2 + ص_3 + ص_4 + ص_5}{5} = \hat{ص}_3$$

$$21.4 = \frac{107}{5} = \frac{17 + 19 + 27 + 23 + 21}{5} = \frac{ص_6 + ص_3 + ص_4 + ص_3 + ص_2 + ص_1}{5} = \hat{ص}_4$$

ب) اذا كان طول المتحرك زوجيا لذا نتبع الخطوات التالية

- نكون جدول نحدد فيه الزمن وقيم المشاهدات الاصلية

- لتحديد موقع المعدل، الاول نكتب العلاقة التالية

$$\frac{1+L}{2} = \text{موقع المعدل المتحرك الاول}$$

فعندما يكون $L=4$ فان موقع المعدل الاول يكون $= \frac{1+4}{2} = 2.5$ أي ان المعدل يقع

بين المشاهدة الثانية والمشاهدة الثالثة والرابعة وهكذا.

وحتى يكون المعدل المتحرك مقابل أي مشاهدة اصلية نلجأ للخطوة التالية.

- نجد معدل متحرك مركزي بطول 2 فيكون هذا المعدل مقابل للمشاهدة الثالثة والرابعة وهكذا.

مثال (6-8): اوجد معدل متحرك بطول 4 لقيم المشاهدات التالية

4، 9، 15، 8، 21، 24، 11، 12.

الحل: نجد ترتيب موقع المعدل المتحرك الاول $= \frac{1+4}{2} = 2.5$

- نرتب البيانات ضمن الجدول (6-8).

الزمن	0	1	2	3	4	5	6	7
قيم المشاهدات	4	9	15	8	21	24	11	12
$\hat{ص}_7$				9	13.25	17	16	17
$\hat{ص}_8$				11.125	15.125	16.5	16.5	

جدول (6-8)

$$13.25 = \frac{53}{4} = \frac{21+8+15+9}{4} = \text{ص}_{3.5}$$

$$9 = \frac{8+15+9+4}{4} = \hat{\text{ص}}_{2.5}$$

$$16 = \frac{64}{4} = \frac{11+24+21+8}{4} = \text{ص}_{3.5}$$

$$17 = \frac{68}{4} = \frac{24+21+8+15}{4} = \text{ص}_{4.5}$$

$$17 = \frac{68}{4} = \frac{12+11+24+21}{4} = \text{ص}_{6.5}$$

ثم نجد المعدلات المركزي التالية والتي ستعبر عنها بالرمز $\hat{\text{ص}}$

$$11.125 = \frac{13.25+9}{2} = \frac{\text{ص}_{3.5} + \text{ص}_{2.5}}{2} = \hat{\text{ص}}_3$$

$$15.125 = \frac{17+13.25}{2} = \frac{\hat{\text{ص}}_{4.5} + \hat{\text{ص}}_{3.5}}{2} = \hat{\text{ص}}_4$$

$$16.5 = \frac{16+17}{2} = \frac{\text{ص}_{5.5} + \text{ص}_{4.5}}{2} = \text{ص}_3$$

$$16.5 = \frac{17+16}{2} = \frac{\text{ص}_{6.5} + \text{ص}_{5.5}}{2} = \text{ص}_6$$

3-8) مركبات السلسلة الزمنية.

عندما نحصل على قيم المشاهدات للسلسلة الزمنية لا بد من دراسة المؤثرات التي قد تؤثر على هذه القراءات وماهذه المؤثرات إلا ما نسميها بمركبات السلسلة الزمنية والتي ناتج حاصل ضربها معا يعطي قيم المشاهدات الاصلية ونعبر عن ذلك بالمعادلة التالية.

(3-8).....

$$\boxed{\text{ص} = \text{ت} \times \text{ف} \times \text{د} \times \text{خ}}$$

حيث ص: هي قيمة المشاهدة الاصلية.

ت: مركبة الاتجاه العام.

ف: المركبة الفصلية (الموسمية)

د: مركبة الدورة.

خ: مركبة الخطأ

وستتناول كل مركبة من المركبات آنفة الذكر على حدى.

4-8) مركبة الاتجاه العام.

تعريف: مركبة الاتجاه العام هي المركبة التي توضح مسيرة السلسلة بشكل عام وعلى مدى بعيد ويمكن استخراجها من خلال معادلة انحدار ص/س والمتمثل بالعلاقة.

.....(4-8)

ص = أس + ب

ومن الملاحظ من العلاقة اعلاه ان قيمة ص مرتبطة بكل من أ، س بشكل رئيسي ولذا يحتمل تزايد ص او تناقصها او قد تحافظ على قيمتها ثابتة. كذلك هناك طرق اخرى لايجاد هذه المركبة منها طريقة الانتشار (التمهيد باليد)، طريقة المعدلات المتحركة، طريقة المربعات الصغرى وكذلك طريقة نصف السلسلة المتحركة.

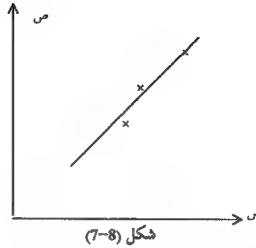
1) طريقة الانتشار (التمهيد باليد) :

مثال (7-8) : البيانات التالية تمثل قيم مشاهدات في سلسلة زمنية لقراءات مثل انتاج مصنع للأحذية خلال اسبوع معين كما في جدول (7-8).

اليوم	السبت	الاحد	الاثنين	الثلاثاء	الاربعاء	الخميس
مقدار الانتاج	120	140	130	145	115	125

جدول (7-8)

حيث مقدار الانتاج بالزوج. والمطلوب ايجاد مركبة الاتجاه العام عن طريق رسم انتشاري وايجاد معادلة الخط العام



ولإيجاد معادلة خط الاتجاه نأخذ نقطتين تقعان على الخط الممهد. ونرمز لهما بالرمز أ، ب ونكتب إحداثي كل منهما مع ملاحظة إعطاء تسلسل عددي 1، 2، 3، ...، 6،
للأيام حتى يسهل إيجاد معادلة خط الاتجاه العام والتي يمكن إيجادها من العلاقة الرياضية

$$\frac{ص_1 - ص_2}{س_1 - س_2} = \frac{ص - ص_2}{س - س_2}$$

$$\frac{130 - 145}{3 - 4} = \frac{ص - 130}{س - 3}$$

$$ص - 130 = 15(س - 3)$$

$$ص - 130 = 15س - 45$$

$$ص = 15س + 85$$

وهذه الطريقة تختلف من شخص الى آخر مما يسبب لها عدم الدقة.

2) طريقة المعدلات المتحركة.

قد يحتاج الى تمهيد لخط السلسلة لكثرة التعرجات التي قد تظهر في السلسلة ولكي نجعل الخط امس لنجأ الى تمهيد هذا الخط عن طريق المعدلات المتحركة. وقد سبق وان تناولنا المعدلات المتحركة بشكل مفصل.

3) طريقة المربعات الصغرى.

وهذه الطريقة أكثر دقة من الطريقتين السابقتين وهي ان نجد معادلة خط الانحدار العام ل

ص/س

ص = أ س + ب.

ثم نجد أ من العلاقة

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{v_i}{s_j} - \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{s_j}}{n} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \frac{v_i}{s_j} \right)^2 - \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{s_j}}{n}$$

.....(5-8)

ونجد ب من العلاقة: $B = \overline{ص} - A \overline{س}$ (6-8)

مثال(8-8): البيانات التالية تمثل قراءات لدرجة حرارة مريض خلال ست ساعات

مأخوذة القراءات كل ساعة كما في الجدول (8-8).

زمن القراءات	1	2	3	4	5	6
درجة الحرارة	37	38	38.5	37.5	37	37

جدول (8-8)

والمطلوب: إيجاد معادلة خط الاتجاه العام .

الحل: نشكل جدول يحوي جميع البيانات المطلوبة للحل كما في جدول (8-9).

س	ص	س.ص	س ²	ص ²
1	37	37	1	1369.00
2	38	76	4	1444.00
3	38.5	115.5	9	1482.25
4	37.5	150	16	1406.25

5	37	185	25	1369
6	37	222	36	1369
ع	21	785.5	91	8439.5

جدول (8-9)

ولاحظ أن تطبيق العلاقة اعلاه:

$$0.114 = \frac{2}{17.5} = \frac{787.5 - 785.5}{73.5 - 91} = \frac{\frac{225 \times 21}{6} - 785.5}{\frac{21 \times 21}{6} - 91} = 1$$

$$\text{ثم نجد بـ } \bar{ص} - \bar{أ س} = 37.101 - 37.5 = 3.5 \times 0.114 = 0.399$$

∴ معادلة الاتجاه العام هي : $\bar{ص} = 37.101 + 0.114 \bar{س}$

د- طريقة معدل نصف السلسلة.

وهذه الطريقة اقل دقة من طريقة المربعات الصغرى الا انها اكثر دقة من المتوسطات المتحركة وطريقة الانتشار. وتتلخص بالخطوات التالية.

- نجد المتوسط الحسابي لنصف السلسلة الثاني اذا كان عدد المشاهدات زوجي اما اذا كان عدد المشاهدات فردي فنهمل المشاهدة الوسطى ثم نجد المتوسط الحسابي للنصف الثاني وبهذا يتعين الاحداثي الصادي للنقطتين.

- لتحديد الاحداثي السيني نعطي قيم المشاهدات ترقيم متسلسل سواء كانت المشاهدات قيما او غير ذلك ثم نجد المتوسط الحسابي للنصف الاول من القيم سواء كان عددها زوجي ام فردي فيكون المتوسط هو الاحداثي السيني وكذلك للنصف الثاني المتوسط الحسابي يكون هو الاحداثي السيني وبذا تتعين النقطتين.

- نصل بين النقطتين بعد تعينهما على المستوى الاحداثي فيكون لدينا خط الاتجاه العام.

- نجد معادلة خط الاتجاه العام من العلاقة.

$$\frac{\bar{ص} - \bar{ص}_1}{\bar{س} - \bar{س}_1} = \frac{\bar{ص}_2 - \bar{ص}_1}{\bar{س}_2 - \bar{س}_1}$$

مثال (8-9): اذا كان انتاج مصنع للألبسة الصوفية خلال عشرة سنوات مبينة

بالجدول التالي حيث الانتاج بالآف القطع. وهي كما في الجدول (8-10).

السنة س	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
عدد القطع ص المنتجة	53	64	67	60	69	74	67	79	85	90

جدول (8-10)

والمطلوب إيجاد معادلة خط الاتجاه العام بطريقة متوسط نصف السلسلة.

الحل: تتبع الخطوات التالية

نكون جدول يشمل جميع متطلبات الحل وهو كما في الجدول (8-11).

السنة س	السنة بالترقيم س	عدد القطع المنتجة ص	معدل نصف س	معدل نصف ص
1970	1	53	الأول = 3	الأول = 62.6
1971	2	64		
1972	3	67		
173	4	60		
1974	5	69		
1975	6	74	الثاني = 8	الثاني = 79
1976	7	67		
1977	8	79		
1978	9	85		
1979	10	90		

جدول (7-11)

$$\text{نصف المعدل الأول لـ ص} = \frac{69 + 60 + 67 + 64 + 53}{5} = 62.6 = \text{ص}_1$$

$$\text{نصف المعدل الاول لـ ص} = \frac{90+85+79+67+74}{5} = 79 = \text{ص}_2$$

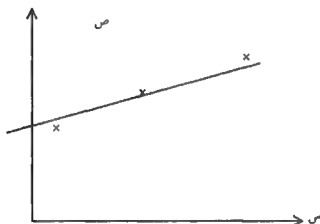
$$\text{نصف المعدل الاول لـ س} = \frac{15}{5} = \frac{5+4+3+2+1}{5} = 3 = \text{س}_1$$

$$\text{نصف المعدل الثاني لـ س} = \frac{40}{5} = \frac{10+9+8+7+6}{5} = 8 = \text{س}_2$$

∴ النقطتين هما أ (3، 62.6) ، ب (8، 79)

- نعين النقطتين على المستوى الاحداثي.

- نصل بين النقطتين أ، ب فيكون هذا هو خط الاتجاه العام.



شكل (7-2)

نجد معادلة خط الاتجاه العام

$$\frac{\text{ص} - 62.6}{5} = \frac{79 - 62.6}{8 - 3} = \frac{\text{ص} - 62.6}{3 - 8}$$

$$\text{ص} - 62.6 = 31.3 - 16.4\text{س}$$

$$\text{ص} = 16.4\text{س} + 31.3 - 62.6 = 16.4\text{س} - 31.3$$

$$\text{ص} = \frac{16.4}{5}\text{س} + \frac{263.8}{5}$$

$$\text{ص} = 3.28 + 52.76$$

وهذه هي معادلة الاتجاه العام.

8-5) تقدير المركبة الفصلية.

لعل هذه الظاهرة تعني في الدرجة الاولى إيجاد قيمة الظاهرة على اعتبار انها لا تتأثر الا بالموسم ولحساب الاثار الموسمية هناك طريقتان.

أ- طريقة النسب للمعدل المتحرك.

ب- من العلاقة $\text{ص} = \text{ت} \times \text{ف} \times \text{د} \times \text{خ}$

فعندما تكون المركبة الاتجاهية والمركبة الدورية والخطأ معلومتين نستطيع إيجاد المركبة الموسمية. وهكذا الا اننا سنتناول الطريقة الاولى بشيء من التفصيل ولسهولة التعامل معها من خلال المثال التالي.

مثال (8-10): اذا كان انتاج مصنع معين خلال خمس سنوات حيث ان كمية الانتاج مأخوذة كل ثلاثة شهور وثبتت البيانات بالجدول التالي والانتاج بآلاف الوحدات كما في الجدول (8-12).

ربيع السنة	1976	1977	1978	1979	1980
الربيع الاول	7	12	8	20	25
الربيع الثاني	9	11	13	21	27
الربيع الثالث	10	14	15	23	28
الربيع الرابع	5	20	16	19	27

جدول (7-12)

والمطلوب إيجاد النسب الموسمية لهذا الانتاج باستخدام فكرة النسبة للمعدل المتحرك.
الحل: لحل مثل هذه المسائل تتبع الخطوات التالية.

- نجد مجموع مكونات الصفوف لمختلف سنوات الانتاج أي يجمع الانتاج في الربع الاول لكل سنة لمختلف السنوات الانتاجية.

- نجد المعدل الموسمي من العلاقة

$$\text{المعدل الموسمي} = \frac{\text{المجموع الموسمي لكل ربع}}{\text{عدد السنوات}} \quad (7-8) \dots\dots\dots$$

$$\text{نجد} - \text{المعدل الموسمي العام} = \frac{\text{مجموع المتوسطات الموسمية}}{\text{عدد الارباع}} \quad (8-8) \dots\dots\dots$$

- نجد النسبة الموسمية لكل حالة من العلاقة

$$\text{النسبة الموسمية} = \frac{\text{المعدل الموسمي}}{\text{المعدل الكلي}} \times 100\% \quad (9-8) \dots\dots\dots$$

والان نشكل جدول نلخص فيه كل ما نحصل عليه من حسابات في الخطوات السابقة كما في الجدول (13-8).

ربع السنة	المجموع الموسمي	المعدل الموسمي	النسبة الموسمية
الربع الاول	72	14.4	87.27
الربع الثاني	81	16.2	98.18
الربع الثالث	90	18	109.09
الربع الرابع	87	17.4	105.45
المعدل العام	82.5	16.5	400.00%

جدول (13-8)

و يمكننا قراءة النسب المئوية المختلفة من العمود الاخير ونلاحظ ان مجموعها هو 400

وذلك بضرب 100 في عدد الفصول.

ولتخليص قيم الظاهرة من تأثير التغيرات الموسمية فاننا نتبع الخطوات التالية.

- نقسم القيم الاصلية على النسب الموسمية.

- بضرب ناتج القسمة في مئة (100).

ونحصل على القيم التالية لكل قيمة فمثلاً القيمة من الربع الاول لعام 1976 بعد

$$8.02 = 100 \times \frac{7}{87.27} = \text{تصبح}$$

القيمة من الربع الثاني لعام 176 بعد تخليصها من التأثير الموسمي تصبح

$$9.17 = \frac{900}{98.18} = 100 \times \frac{9}{98.18}$$

وهكذا لباقي القيم في الجدول المذكور.

ج - التغيرات الدورية والعرضية.

يمكن الحصول على تأثير كل من التغيرات الدورية والعرضية وذلك من العلاقة

$$\text{ص} = \text{ت} \times \text{ف} \times \text{د} \times \text{خ}$$

وذلك بتخليص الظاهرة من تأثير كل من التغيرات الاتجاهية والتغيرات الموسمية معاً

ويمكن الحصول عليهما معاً من العلاقة.

$$(10-8) \dots\dots\dots \boxed{\text{د} \times \text{خ} = \frac{\text{ص}}{\text{ت} \times \text{ف}}}$$

ونظراً لتداخلهما معاً فيوجدنا بشكل قيمة واحدة.

تمارين عامة على السلاسل الزمنية

س1: اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية: 9، 13، 18، 19، 12، 21، 10

تمثل سلسلة زمنية والمطلوب إيجاد.

(أ) المعدلات المتحركة بطول 3.

(ب) المعدلات المتحركة بطول 5.

(ج) المعدلات المتحركة بطول 7.

(د) المعدلات المتحركة بطول 4.

(هـ) المعدلات المتحركة بطول 6.

(و) اوجد معامل الخشونة لهذه السلسلة

س2- الجدول التالي يمثل عدد الطلاب في مدرسة ما خلال الاعوام 1978-1987

السنة	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
عدد الطلاب	540	630	650	690	720	740	790	840	900	950

والمطلوب:

أ- رسم الشكل الانتشاري لهذه البيانات.

ب- اوجد معادلة الاتجاه العام بواسطة التمهيد باليد ثم اوجد القيم الاتجاهية للقيم الاصلية

ج- اوجد معادلة الاتجاه العام بواسطة طريقة معدل نصف السلسلة. ثم اوجد القيم الاتجاهية للقيم الاصلية.

د- احسب القيم الاتجاهية عن طريق اسلوب المعدلات المتحركة و بطول 3 .

س3- الجدول التالي يمثل انتاج مصنع ما من الوحدات المنتجة مقدرة بالالف الوحدات خلال عشرة سنوات.

السنوات	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
عدد الوحدات المنتجة	7	13	19	21	27	28	32	35	39	40

والمطلوب .

أ- رسم شكل الانتشار لهذه البيانات.

ب- إيجاد معادلة الاتجاه العام بواسطة التمهيد باليد ثم إيجاد القيم الاتجاهية للقيم الاصلية.

ج- اوجد معادلة الاتجاه العام بواسطة طريقة المربعات الصغرى ثم إيجاد القيم الاتجاهية للقيم الاصلية.

د- اوجد معادلة الاتجاه العام باستخدام طريقة معدل نصف السلسلة ثم اوجد القيم الاتجاهية لكل قيمة اصلية.

الفصل التاسع

الارقام القياسية

9-1) مفهوم الأرقام القياسية واستخداماتها وأنواعها:

لعل هذا الموضوع من اهم المواضيع التي تلعب دوراً هاماً في حياتنا اليومية حيث تربطنا بما سبق وبما سيكون لاحقاً وخاصة عند دراسة اسعار سابقة وربطها بالاسعار الحالية والمستقبلية لعدد من الاصناف وكذلك ايضا ربط كميات منتجة سابقا مع الانتاج الحالي والمستقبلي وهكذا دراسات اخرى. ولا نستطيع عمل دراسات من هذا النوع الا من خلال التعرف على ادوات ومقاييس لهذا الغرض تسمى بالارقام القياسية وعليه فاننا سنعطي التعريف التالي حتى نستطيع توضيح هذا المفهوم.

9-1-1: مفهوم الرقم القياسي :

لتوضيح هذا المفهوم لا بد من إعطاء التعاريف التالية :

— تعريف: الرقم القياسي هو اداة احصائية مصممة لتبين التغير في قيمة الظاهرة او مجموعة مرتبطة من الظواهر قيد الدراسة والتي لها علاقة بالنسبة لقيمتها في الزمن والمكان الجغرافي او أية خاصية اخرى.

وعندما نريد قياس التغير في قيمة الظاهرة فاننا ننسب قيمة الظاهرة في وقت معين الى قيمتها في وقت آخر او قيمتها في مكان جغرافي معين الى قيمتها في مكان جغرافي آخر. وقد تكون هناك زيادة او انخفاض في قيمة الظاهرة موضوع البحث.

فترة الاساس: هي الفترة الزمنية التي نقيس منها التغير في الظاهرة.

فترة المقارنة: هي الفترة الزمنية التي حصل خلالها تغير في الظاهرة اما اذا اردنا مقارنة التغير بين مكانين مختلفين فان المكان الذي نقيس منه التغير فيسمى مكان الاساس

والمكان الذي حصل خلاله التغير يسمى مكان المقارنة .

9-1-2 استخدامات الارقام القياسية.

يمكن استخدام الارقام القياسية في كثير من مجالات الحياة وخاصة الاقتصادية منها وذلك لأجل.

- (1) مقارنة اسعار سلع مختلفة.
- (2) مقارنة تكاليف المعيشة في مكان مع مكان آخر.
- (4) يمكن التنبؤ بأحوال الاعمال والاقتصاد.
- (5) مقارنة عدد العمال في سنة معينة مع عددهم في سنة سابقة.
- (6) مقارنة المستوى التعليمي في بلد ما وفي سنة ما مع مستواه في نفس البلد في سنة اخرى.

- (7) مقارنة عدد السكان في بلد وفي سنة ما مع عدد السكان في سنة اخرى.
- وهناك الكثير الكثير من الاستعمالات للارقام القياسية .
ومن المفيد أن نعطي الخصائص لسنة الأساس.

خصائص سنة الأساس:

- (1) تحديد سنة الأساس بحيث لا تكون بعيدة عن سنة المقارنة.
- (2) ان تكون سنة الأساس ذات بنية من حيث موضع الرقم القياسي متشابهة مع ما هو عليه في سنة المقارنة.
- (3) ان تكون سنة الأساس ذات هدوء نسبي من انعكاساتها وداعياتها واثرها على الظاهرة قيد الدراسة.

9-3-1 انواع الارقام القياسية:

هناك عدة انواع من الارقام القياسية نذكر منها.
(1) الأرقام القياسية البسيطة.

(2) الأرقام القياسية المرجحة.

9-2) الرقم القياسي البسيط.

تعريف: الرقم القياسي البسيط وهو الرقم المتمثل من نسبة متغير واحد في فترة المقارنة على نفس المتغير في فترة أخرى هي فترة الأساس ومن هذه الأرقام. ويقسم إلى قسمين :

(1) الرقم القياسي البسيط.

(2) الرقم القياسي التجميعي البسيط.

أما الأرقام القياسية البسيطة ومنها.

أ) الرقم القياسي البسيط للسعر (متسوب السعر).

وهو النسبة المئوية لسعر سلعة معينة في سنة المقارنة والذي سنرمز له بالرمز س_م الى سعرها في سنة الأساس والذي سنرمز له بالرمز س₀ وبصيغة رموز يمكن كتابته على النحو.

$$I_s = \frac{P_s}{P_0} \times 100\% \text{ حيث } I_s: \text{الرقم القياسي البسيط للأسعار} \dots (9-1)$$

مثال (9-1): إذا كان معدل سعر كيلو البنلورة في عام 1990 هو 25 قرشاً وفي عام 1995 كان 27 قرشاً أوجد الرقم القياسي البسيط لسعر البنلورة على اعتبار أن عام 1990 هو سنة الأساس.

$$\text{الحل: } I_s = \frac{27}{25} \times 100\% = 108\% \text{ أي بزيادة قدرها } 8\% .$$

ب) الرقم القياسي البسيط للكميات (متسوب الكمية).

هو النسبة المئوية لكميات او حجوم سلعة معينة في فترة معينة (سنة مقارنة) والتي سنرمز لها بالرمز ك_م الى كمياتها او حجومها في فترة أخرى (سنة أساس) والتي سنرمز لها بالرمز ك₀ وبصيغة رموز يمكن كتابتها على الصورة

(2-9).....

$$أ ك = \frac{ك}{ك_0} \times 100 \%$$

(ج) الرقم القياسي البسيط للقيمة (منسوب القيمة)

هو النسبة المئوية المتوية لقيمة سلعة معينة في فترة المقارنة والتي سنرمز لها بالرمز $ك_0$ = $ك_0$ × م إلى قيمتها في سنة الأساس والتي سنرمز بالرمز $ك_0$ = $ك_0$ × م ويمكن صياغتها على النحو

(3-9).....

$$أ ك = \frac{ك_0 \times م}{ك_0} \times 100 \%$$

(2) الأرقام القياسية التجميعية البسيطة:

وهي تقسم إلى ثلاثة اصناف نذكر منها ما يلي:

(4-9).....

$$أ) \text{الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار} = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^n \frac{ك_{0i}}{ك_{1i}}}{\sum_{i=1}^n \frac{ك_{0i}}{ك_{0i}}}$$

(5-9).....

$$ب) \text{الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات} = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^n \frac{ك_{1i}}{ك_{0i}}}{\sum_{i=1}^n \frac{ك_{0i}}{ك_{0i}}}$$

(6-9)...

$$ج) \text{الرقم القياسي التجميعي البسيط للقيمة} = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^n \frac{ك_{1i} \times م_{1i}}{ك_{0i} \times م_{0i}}}{\sum_{i=1}^n \frac{ك_{0i} \times م_{0i}}{ك_{0i} \times م_{0i}}}$$

$$= 100 \times \frac{\sum_{i=1}^n \frac{ك_{1i}}{ك_{0i}} \times \frac{م_{1i}}{م_{0i}}}{\sum_{i=1}^n \frac{ك_{0i}}{ك_{0i}} \times \frac{م_{0i}}{م_{0i}}}$$

9-3: الأرقام القياسية المرجحة؛ ومنها:

9-3-1 الأرقام القياسية للأسعار والمرجحة بالكميات.

ومن أمثلة هذا النوع من الأرقام ما يلي :

أ) الرقم القياسي البسيط للأسعار والمرجح بكميات سنة الأساس (رقم لاسبير للأسعار).

$$\text{الرقم القياسي لاسبير} = \frac{\sum_{j=1}^n \text{من } \text{ك}_{\text{ر}}}{\sum_{j=1}^n \text{من } \text{ك}_{\text{ر}_0}} \times 100\% \dots\dots\dots (7-9)$$

ب) الرقم القياسي للأسعار والمرجح بكميات سنة المقارنة.

$$\text{رقم باش للأسعار} = \frac{\sum_{j=1}^n \text{من } \text{ك}_{\text{ر}}}{\sum_{j=1}^n \text{من } \text{ك}_{\text{ر}_0}} \times 100\% \dots\dots\dots (8-9)$$

الرقم القياسي للأسعار والمرجح بالمتوسط الحسابي لكميات سنة الأساس والمقارنة

$$\begin{aligned} \text{(ج) (رقم مارشال-إيدجورث)} &= \frac{\sum_{j=1}^n \text{من } \text{ك}_{\text{ر}} \times \left(\frac{\text{ك}_{\text{ر}_0} + \text{ك}_{\text{ر}}}{2} \right)}{\sum_{j=1}^n \text{من } \text{ك}_{\text{ر}_0} \times \left(\frac{\text{ك}_{\text{ر}_0} + \text{ك}_{\text{ر}}}{2} \right)} \times 100\% \dots\dots (9-9) \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n \text{من } \text{ك}_{\text{ر}} (\text{ك}_{\text{ر}_0} + \text{ك}_{\text{ر}})}{\sum_{j=1}^n \text{من } \text{ك}_{\text{ر}_0} (\text{ك}_{\text{ر}_0} + \text{ك}_{\text{ر}})} \times 100\% \end{aligned}$$

(5) الرقم القياسي التجميعي للأسعار والمرجح بالوسط الهندسي لكميات سنة الأساس وسنة المقارنة.

(10-9).....

$$\%100 \times \frac{\sum_{i=0}^n \sqrt{\frac{K_i \times R_i}{K_i \times R_i}}}{\sum_{i=0}^n \sqrt{\frac{K_i \times R_i}{K_i \times R_i}}} =$$

(6) رقم فيشر للأسعار = رقم لاسبير × رقم باش وهو الرقم الأمثل

(11-9)...

$$\%100 \times \frac{\sum_{i=0}^n \sqrt{\frac{K_i \times R_i}{K_i \times R_i}}}{\sum_{i=0}^n \sqrt{\frac{K_i \times R_i}{K_i \times R_i}}} \times \frac{\sum_{i=0}^n \sqrt{\frac{K_i \times R_i}{K_i \times R_i}}}{\sum_{i=0}^n \sqrt{\frac{K_i \times R_i}{K_i \times R_i}}} = \text{رقم فيشر للأسعار}$$

(ب) الأرقام القياسية للكميات والمرجحة بالأسعار:

وهي نفس الأرقام السابقة ولكن بدلا من الترجيح بالكميات كما كان سابقا بل الكميات ترجح بالأسعار.

مثال (1-9): البيانات في جدول رقم (1-9) تبين أسعار (س) بالدينار/طن وكميات

(ك) بالآلاف الإطنان لثلاثة أصناف من الخضروات المباعة في السوق المركزي

في عامي 1990، 1994.

الصنف	1994		1990		الصنف
	ك	س	ك	س	
بندورة	80	350	160	250	
باذنجان	25	200	15	150	
فلفل أخضر	10	400	5	350	

جدول (1-9)

المطلوب إيجاد

- (1) الرقم القياسي البسيط لسعر صنف البندورة.
 - (2) الرقم القياسي البسيط التجميعي للأسعار.
 - (3) الرقم القياسي البسيط التجميعي للكميات.
 - (4) رقم لاسير للأسعار.
 - (5) رقم باش للأسعار.
 - (6) رقم مارشال - ايديجورث للأسعار (المرجح بالوسط الحسابي)
 - (7) الرقم القياسي للأسعار والمرجح بالوسط الهندسي.
 - (8) الرقم القياسي الامثل (رقم فيشر)
- الحل: نكون جدول الحل (9-2).

										1994		1990		
الصف	س	ك	س	ك	س	ك	س	ك	س	ك	س	ك	س	ك
	2	ك	2	ك	2	ك	2	ك	2	ك	2	ك	2	ك
البندورة	17500		24500		70		20000		28000		21000		15000	
الفاكهة	3000		4000		20		3750		5000		3000		2250	
الخضار	2625		3000		7.5		35000		4000		2000		1750	
المجموع	23125		31500				272500		37000		26000		19000	

جدول (9-2)

$$(1) \text{ الرقم القياسي البسيط للبندورة } = 100 \times \frac{350}{250} = 140\% \text{ أي زيادة مقدارها } 40\%.$$

$$(2) \text{ الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار } = 100 \times \frac{950}{750} = 126.67\%$$

$$(3) \text{ الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات} = \frac{115}{80} \times 100\% = 143.75\%$$

$$(4) \text{ رقم لاسبير} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{من درجہ 0 ك} \times \text{درجہ 0 ك}}{n} \times 100\% = \frac{26000}{19000} \times 100\% = 136.84\%$$

$$(5) \text{ باش للاسعار} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{من درجہ 0 ك} \times \text{درجہ 0 ك}}{n} \times 100\% = \frac{37000}{27250} \times 100\% = 135.77\%$$

$$(6) \text{ رقم مارشال ايدجورت} = \frac{\sum_{i=1}^n (\text{من درجہ 0 ك} + \text{درجہ 0 ك})}{2} \times 100\% = \frac{3150}{23125} \times 100\% = 136.22\%$$

(7) ثم نكون جدول (3-9) تابع

س م درجہ 0 ك × درجہ 0 ك	س م درجہ 0 ك × درجہ 0 ك	✓ درجہ 0 ك × درجہ 0 ك
24248.0	17320.00	69.28
3872.0	2904.00	19.36
2828.0	2474.5	7.07
30948	22698.5	المجموع

جدول (3-9)

(7) الرقم القياسي للاسعار والمرجح بالوسط الهندسي

$$100 \times \frac{30948}{22698.5} = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{\text{من درجہ 0 ك} \times \text{درجہ 0 ك}}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{\text{من درجہ 0 ك} \times \text{درجہ 0 ك}}}$$

$$=136.34\%$$

(8) الرقم القياسي الامثل (فيشر) = $\sqrt{\text{لاسيير} \times \text{باش}}$

$$\sqrt{136.84 \times 135.77} = 136.30\%$$

مثال (9-2): البيانات في جدول (9-4) تمثل الكميات المباعة واسعار مجموعة من الاصناف في سنتي 1975، 1979.

سنة 79		سنة 75		السنة / الصنف
ل.م.ر	س.م.ر	ل.م.ر	س.م.ر	
50	105.4	24	59.2	أ
48	31.7	22	22	ب
49	10.3	27	2.8	جـ
54	6.6	28	8.7	د

جدول (9-4)

المطلوب : إيجاد

- (1) الرقم القياسي للاسيير.
 - (2) الرقم القياسي لباش.
 - (3) الرقم القياسي لما رشال والمرجح بالوسط الحسابي.
 - (4) الرقم القياسي لما رشال والمرجح بالوسط الهندسي.
 - (5) الرقم القياسي لفيشر.
- الحل: تكوين جدول الحل (9-5).

الصفة	سنة 75		سنة 79		سنة 83		الصفة
	كم	سم	كم	سم	كم	سم	
ب	22	22	31.7	48	1056	484	1521.6
ج	2.8	27	10.3	49	137.2	75.6	504.7
د	8.7	28	6.6	54	469.8	243.6	356.4
المجموع	-	-	-	-	4323	2080	7652.7

جدول (9-5)

نكون جدول (9-6) تابع

س.د. كم	كم + كم	سم.د. كم	سم.د. كم	سم.د. كم	سم.د. كم	سم.د. كم
2529.6	158.6	7930	3806.4	74.8818	3744.0887	1797.1626
697.4	53.7	2577.6	1181.4	26.40083	1267.5999	580.9833
278.1	13.1	641.9	353.7	5.3703	263.1441	144.9978
184.8	15.3	826.2	428.2	7.5776	409.903	212.1728
3689.9	240.7	11975.7	5769.9	114.238	5684.0231	2735.3164

جدول (9-6)

$$(1) \text{ الرقم القياسي للاسبر} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{من سم.د. كم}}{\sum_{i=1}^n \text{من سم.د. كم}} \times 100\%$$

$$= \frac{4323}{2080} \times 100\% = 207.8365\%$$

أي بزيادة مقدارها 107٪

$$(2) \text{ الرقم القياسي لباش} = \frac{\sum_{j=1}^n \text{من } 100 \cdot \text{ك.ج.}}{\sum_{j=1}^n \text{من } 100 \cdot \text{ك.ج.}} \times 100\%$$

$$207.3959 = 100\% \times \frac{7652.7}{3689.9}$$

أي زيادة 107.3959%

$$(3) \text{ الرقم القياسي لمارشال - إندجورث} = \frac{\sum_{j=1}^n (\text{ك.ج.} + \text{ك.ج.})}{\sum_{j=1}^n (\text{ك.ج.} + \text{ك.ج.})} \times 100\%$$

$$207.5547 = 100\% \times \frac{11975.7}{5769.9}$$

أي زيادة 107.55%

$$(4) \text{ رقم قياسي مارشال - إندجورث المرجح بالوسط الهندسي} = \frac{\sum_{j=1}^n \sqrt{\text{ك.ج.} \cdot \text{ك.ج.}}}{\sum_{j=1}^n \sqrt{\text{ك.ج.} \cdot \text{ك.ج.}}} \times 100\%$$

$$207.8023 = 100\% \times \frac{5684.0231}{2735.3164}$$

أي زيادة 107.8013%

(8) الرقم القياسي الامثل (فيشر) = $\sqrt{\text{لاسيير} \times \text{باش}}$

$$\sqrt{207.9359 \times 207.8365}$$

$$207.6161 = \sqrt{43104.438}$$

أي زيادة 107.6161%

مثال (9-3): البيانات التالية في جدول (9-7) تمثل الاسعار والكميات المباعة لعدة اصناف سنة 1975، 1979.

1979		1975		
س.م	ك.م	ك.م	س.م	الصنف
50	105.4	24	53.2	البندورة
48	37.7	22	22	الباذنجان
49	10.3	27	2.8	القلفل
54	6.6	28	8.7	العنب
201	160	101	86.7	المجموع

جدول (7-9)

المطلوب: إيجاد الأرقام القياسية المختلفة على اعتبار أن 1975 سنة أساس 1979 سنة مقارنة.

الحل: نكون جدول الحل رقم (8-9)

الصنف	ك.م س.م	ك.م س.م	ك.م س.م	ك.م س.م
البندورة	52.70	2529.6	2660	1276.8
الباذنجان	1809.6	829.4	1056	484
القلفل	504.7	278.1	137.2	75.6
العنب	356.4	184.8	469.8	243.6
المجموع	2732.4	3821.9	4323	2080

جدول (8-9)

ثم نبدأ بتطبيق العلاقات الرياضية واستخدام الجداول

$$(1) \text{ الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار } = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{P_i}{P_0}}{\sum_{i=1}^n 1} \times 100 = \frac{201}{101} \times 100 = \frac{20100}{101} = 199\%$$

$$(2) \text{ الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات} = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{Q_{j0}}}{\sum_{j=1}^n 1} = \%100 \times \frac{160}{86.7} = \%184.54$$

$$(3) \text{ رقم لاسبير للاسعار} = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{P_j}{P_{j0}}}{\sum_{j=1}^n 1} = \%100 \times \frac{432300}{2080} = \%207.84$$

$$(4) \text{ رقم باش للاسعار} = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{P_j}{P_{j0}}}{\sum_{j=1}^n 1} = \%100 \times \frac{7940.7}{3821.9} = \%207.77$$

$$(5) \text{ رقم فيشر للاسعار} = \sqrt{207.77 \times 207.84} = \%207.8$$

$\sqrt{\frac{Q_j}{Q_{j0}} \times \frac{P_j}{P_{j0}}}$	$\sqrt{\frac{Q_j}{Q_{j0}} \times \frac{P_j}{P_{j0}}}$	$\sqrt{\frac{Q_j}{Q_{j0}} \times \frac{P_j}{P_{j0}}}$	$\frac{\frac{Q_j}{Q_{j0}} + \frac{P_j}{P_{j0}}}{2} \times \frac{Q_j}{Q_{j0}}$	$\frac{\frac{Q_j}{Q_{j0}} + \frac{P_j}{P_{j0}}}{2} \times \frac{P_j}{P_{j0}}$	
3744	1797.12	74.88	3960	1900.8	
1382.4	633.6	28.8	1432.8	656.7	
263.13	144.99	5.37	320.95	176.85	
409.32	212.24	7.58	413.1	214.2	
5798.85	2787.95		6126.85	2948.55	موج

جدول (9-9)

$$(6) \text{ رقم مارشال - ايديجورث للاسعار} = \frac{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\frac{Q_j}{Q_{j0}} + \frac{P_j}{P_{j0}}}{2} \right) \times \frac{Q_j}{Q_{j0}}}{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\frac{Q_j}{Q_{j0}} + \frac{P_j}{P_{j0}}}{2} \right) \times \frac{P_j}{P_{j0}}} = \%100 \times \frac{6126.85}{2948.55}$$

$$= 207.79\%$$

(7) رقم مارشال ايدجورث للوسط الهندسي للاسعار.

$$100\% \times \frac{5798.85}{2787.95} = 100\% \times \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt[n]{K_{i0} \times K_{i1}}}{\sum_{i=1}^n \sqrt[n]{K_{i0} \times K_{i1}}} =$$

$$= 208\%$$

الوحدة العاشرة

الاحصاءات الحيوية

1-10 : تعريف الاحصاءات السكانية وأهميتها :

1-1-10 تعريف الاحصاء السكاني :

(الاحصاء السكاني هو الدراسة الاحصائية للسكان وخصائصهم وفعاليتهم وتغيراتهم من حيث التكاثر والوفاة والانتقال والعوامل التي تؤثر فيها والنتائج التي تنشأ عنها)

2-1-10 أهمية الاحصاء السكاني :

قبل الدخول في شرح أهمية الاحصاء السكاني لابد من تعريف السكان وهم مجموعة من الناس تعيش ضمن حدود بلد معين سواء كانوا يعيشون بصفة دائمة أو مؤقتة. وتنبع أهمية الاحصاء السكاني من انه يقوم بدراسة السكان وجمع البيانات المختلفة عنهم وهذه البيانات تعتبر مهمة جدا وخاصة بالنسبة لصانعي القرار والعمليات التخطيطية فالقرار الناجح هو القرار الذي يعتمد على معلومات دقيقة ونلاحظ بأن السكان هم مصدر النشاطات الاقتصادية والثقافية والصحية والاجتماعية وغيرها وهذه النشاطات مترابطة ويؤثر بعضها في بعض.

ويمكن الحصول على البيانات السكانية من مصدرين.

أ- التعداد السكاني: وهي عملية حصر الافراد في مكان محدد في لحظة معينة بهدف جمع البيانات التي تصف افراد المجتمع وهناك نوعان من التعداد:

1- التعداد النظري: وهو حصر الفرد في المكان الذي تعود ان يقيم فيه الشخص بشكل دائم بغض النظر عن مكان وجوده الفعلي لحظة التعداد.

2- **التعداد الفعلي:** حصر الاشخاص في مكان وجودهم لحظة التعداد حتى ولو كان زائرا (تعداد واقعي).

وكان آخر تعداد للسكان هو في الاردن سنة 1976 ومن اهدافه تكوين خامات للدراسة والبحوث.

10-1-3) انواع البيانات التي يتم حصرها :

- 1) بيانات عن خصائص الافراد كالعمر، الجنس، والديانة.
 - 2) بيانات عن تكوين الاسرة كالعدد والسكن.
 - 3) بيانات عن الخصوبة مثل عدد المواليد للنساء المتزوجات والارامل.
- كيفية جمع البيانات:

- 1) تحديد الهدف.
- 2) وضع الوحدات الادارية على الخرائط ثم تحديدها على الارض.
- 3) تحديد اجزاء الوحدات الادارية الى قرية وقضاء.
- 4) ترقيم الطرق والالوية.
- 5) حصر المكان.
- 6) تقييم البيانات: وذلك عن طريق اضافة المواليد والضيوف الى البيانات في ليلة التعداد، وطرح الوفيات والغائبين في ليلة التعداد حتى نحصل على ارقام مطابقة للارقام في ليلة التعداد.

10-1-4) التحرك السكاني

والتحرك السكاني يحتوي على نوعين من التحركات هما التحرك الداخلي (الهجرة الداخلية) والتحرك الخارجي ويسمى بالهجرة الخارجية.

1- الهجرة الداخلية

وهي انتقال السكان من المناطق الريفية الزراعية الى المدن حيث توجد فيها المصانع

وهذا يتم في داخل البلد الواحد والدوافع للهجرة هي ما يلي:-

- الدوافع المادية تنقص في الموارد المحلية وضيق العيش مما يدفع عدد من السكان الى الانتقال الى حيث توجد الثروات الطبيعية وفرص العمل الجيدة والمغرية مما يؤدي الى رفع مستوى المعيشة وغالبا ما تكون هذه الاقاليم اكثر انتعاشا ورواجا مما يساعد السكان المهاجرين اليها في مما رسة اعمالهم التجارية ومزاولة المهن الحرة والحصول على اجور مرتفعة.

- الكثافة السكانية ويقصد بها ارتفاع عدد السكان في بعض الاقاليم نتيجة لعوامل اقتصادية او اجتماعية او ثقافية ففي هذه الحالة اما تلجأ الدولة الى توزيع السكان الى أقاليم اخرى اقل كثافة او ان يلجأ الافراد الى الهجرة الى اقاليم اخرى لتحسين ظروف معيشتهم.

- المناخ المختلف في الاقاليم المختلفة داخل البلد الواحد حيث ان معظم الناس يفضل الانتقال الى الاماكن ذات الطقس المعتدل.

- بعض الاقاليم داخل البلد الواحد تعتبر اكثر تطورا من غيرها بوجود المرافق العامة المتطورة والخدمات المتطورة مما يؤدي الى انتقال السكان الى هذه الاقاليم للاستفادة من الامتيازات الموجودة فيها.

اما الهجرة الداخلية فلا تأثير لها على عدد السكان.

2- الهجرة الخارجية

وهي انتقال السكان من بلد الى اخر ودوافع هذا النوع من الهجرة ما يلي:-

- دوافع اقتصادية - دوافع سياسية - طلبا للعلم

وهذا النوع من الهجرة توجد له اثاره على كل من البلد المرسل للمهاجرين والبلد المستقبل للمهاجرين ومن هذه الآثار مايلي:-

(1) نقص عدد السكان في البلد المرسل وزيادته في البلد المستقبل.

(2) تركيبة السكان من حيث العمر والجنس والمهنة في كل من البلد المرسل والبلد المستقبل.

مقاييس النمو السكاني

ان التغير في عدد السكان ينتج عن الزيادة الطبيعية وهي الفرق بين المواليد وعدد الوفيات بالإضافة الى صافي الهجرة الذي يشكل الفرق بين اعداد المهاجرين الى البلد والمهاجرين منه ومن مقاييس النمو السكاني:

$$\text{معدل الزيادة الطبيعية} = 1000 \times \frac{\text{عدد المواليد الأحياء} - \text{عدد الوفيات}}{\text{اجمالي عدد السكان في منتصف السنة}} \dots (1-10)$$

مثال (1-10) : اذا كان عدد المواليد احياء في احدى البلدان 300000 وكان عدد السكان في منتصف السنة 10.000.000 وعدد الوفيات 100000 فالمطلوب استخراج معدل الزيادة الطبيعية لهذا البلد.

$$\begin{aligned} \text{معدل الزيادة الطبيعية} &= 1000 \times \frac{100000 - 300000}{10000000} \\ &= 1000 \times \frac{200000}{10000000} = 20 \text{ بالآلف} \end{aligned}$$

(2-10) التقديرات السكانية وايجادها باستخدام نظام المتوالية العددية:

الافراض في هذا النظام ان السكان يتزايدون او يتناقصون بمقدار عددي ثابت من سنة لآخرى في الفترة الفاصلة بين تعدادين للسكان. ولتقدير عدد السكان فاننا نستخدم الصيغة التالية:-

(2-10).....

$$ح = ع + (ن-1)ز$$

حيث ان ح = التعداد اللاحق ع = التعداد الاول

ن = عدد السنوات بضمنها سنة التعداد الاول

ز = المقدار الثابت للزيادة السكانية (اساس المتوالية العددية)

مثال (10-2): اذا كان عدد سكان بلد ما عام 1960، 1970 على التتابع 3 ملايين، 3.8 مليون

المطلوب تقدير حجم السكان عام 1980 باتباع نظام المتوالية العددية.

الحل: نحتسب اولا كمية الزيادة السنوية الثابتة (ز)

$$3.8 - 3 = (11 - 1)z$$

$$3.8 - 3 = 10z$$

$$3.8 - 3 = 10z$$

$$10 = 0.8z$$

$$z = \frac{0.8}{10} = 0.08$$

والان نقدر عدد السكان عام 1980

$$3.8 - 3 = 10(11 - 1)z$$

$$3.8 - 3 = 10 \times 20z$$

$$3.8 - 3 = 200z$$

ب- المصدر الثاني للبيانات السكانية هو الاحصاءات الحيوية

10-3) احصائيات الوفيات

يوجد عدة عوامل تؤثر على الوفيات اهمها:

1- الحروب ومضاعفاتها الصعبة

2- المجاعات والامراض المعدية ترفع اعداد الوفيات

3- التقدم الحضاري والصحي يخفض معدل الوفيات ومن اهم معدلات الوفيات ما يلي:-

$$\text{أ- معدل الوفيات الخام} = \frac{\text{اجمالي عدد الوفيات عدا المواليد المتوى}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times 1000 \quad \text{.. (3-10)}$$

مثال (3-10): اذا كان عدد الوفيات عدا المواليد موتى 100000 وكان عدد السكان في منتصف العام 8.000.000 فاحسب معدل الوفيات الخام بالالاف.

$$\text{معدل الوفيات الخام} = \frac{100000}{8000000} \times 1000 = 12.5 \text{ بالآلف}$$

$$\text{ب) معدل وفيات الأمومة} = \frac{\text{عدد وفيات النساء أثناء الحمل والولادة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times 1000 \quad \text{.. (4-10)}$$

مثال (4-10) : اذا كان عدد المواليد الاحياء في محافظة ما 250000 وعدد وفيات النساء أثناء الحمل والولادة 2000 فاحسب معدل وفيات الامومة.

$$\text{معدل وفيات الامومة} = \frac{2000}{250000} \times 1000 = 8 \text{ بالآلف}$$

$$\text{ج) معدل وفيات الاطفال الرضع لاقبل من سنة} = \frac{\text{عدد وفيات الاطفال الرضع}}{\text{عدد المواليد الأحياء}} \times 1000 \quad \text{.. (5-10)}$$

مثال (5-10) : اذا كان عدد وفيات الاطفال الرضع (الاقبل من سنة) 5000 وكان عدد المواليد الاحياء 250000 حسب معدل وفيات الاطفال الرضع

$$\text{معدل وفيات الاطفال الرضع} = \frac{5000}{250000} \times 1000 = 20 \text{ بالآلف}$$

عدد الوفيات لعمر أقل من 28 يوم

$$(د) \text{ معدل وفيات الاطفال حديثي الولادة (اقل من شهر)} = \frac{\text{عدد الوفيات الاطفال حديثي الولادة}}{\text{عدد المواليد الأحياء}} \times 1000 \dots (10-6)$$

مثال (10-6): اذا كان عدد الاطفال المتوفين من أعمار 28 يوما فأقل يساري وعدد المواليد احياء 250000 فاحسب معدل وفيات الاطفال حديث الولادة.

$$\text{الحل : معدل وفيات الاطفال حديثي الولادة} = \frac{150}{250000} \times 1000 = 0.6 \text{ بالالف}$$

عدد الوفيات (من 28 يوم الى 11 شهر

$$(هـ) \text{ معدل وفيات الطفولة المبكرة} = \frac{\text{عدد الوفيات الاطفال من 28 يوم الى 11 شهر}}{\text{عدد المواليد الأحياء - عدد الوفيات اقل من 28 يوم}} \times 1000 \dots (10-7)$$

مثال (10-7): اذا كان عدد وفيات الاطفال في سن مبكرة (28 يوما الى 11 شهرا) 2500 وعدد المواليد احياء 230470 وعدد الوفيات في السن الاقل من 28 يوما 470 وفاة احسب معدل وفيات الطفولة المبكرة.

الحل : معدل وفيات الطفولة المبكرة =

$$= \frac{2500}{470 - 230470} \times 1000 = \frac{2500000}{2300000} = 10.9 \approx 11 \text{ بالالف}$$

4-10 احصائيات الخصوبة:

وتقسم الى مجموعتين رئيسيتين:

أ- معدلات ونسب المواليد . ب - مقاييس النمو السكاني

أ - معدلات ونسب المواليد:

وتحتوي على المعدلات التالية:

عدد المواليد احياء خلال السنة

$$(1) \text{ معدل المواليد الخام} = \frac{\text{عدد المواليد احياء خلال السنة}}{\text{عدد السكان في نصف سنة}} \times 1000 \dots (10-8)$$

مثال (10-8) : اذا كان عدد المواليد احياء خلال عام 1985 في احدى المحافظات (30000) وعدد السكان في هذه المحافظات (400000) فأوجد معدل المواليد الخام لكل 1000 نسمة من السكان.

$$\text{الحل : معدل المواليد الخام} = \frac{30000}{400000} \times 1000 = 75 \text{ بالآلف}$$

عدد المواليد احياء خلال السنة
(2) معدل الخصوبة العام = $1000 \times \frac{\text{عدد الاناث في سن الحمل في منتصف السنة}}{\text{عدد المواليد احياء خلال السنة}}$... (10-9)

مثال (10-9) : اذا كان عدد المواليد احياء خلال السنة 80000 في احدى البلدان وكان عدد الاناث في سن الحمل في منتصف السنة يساوي 900000 فأوجد معدل الخصوبة العام.

$$\text{الحل : معدل الخصوبة العام} = \frac{80000}{90000} \times 1000 = 88.9 \text{ بالآلف}$$

عدد المواليد احياء خلال السنة
(3) معدل الخصوبة للنساء المتزوجات = $1000 \times \frac{\text{عدد النساء المتزوجات والأرامل والمطلقات في منتصف نفس السنة}}{\text{عدد المواليد احياء خلال السنة}}$... (10-10)

مثال (10-10) : اذا كان عدد المواليد احياء خلال السنة 100000 في احدى البلدان وكان عدد النساء المتزوجات والأرامل والمطلقات في منتصف نفس السنة يساوي 1500000 فأوجد معدل الخصوبة للنساء المتزوجات.

$$\text{معدل الخصوبة للنساء المتزوجات} = \frac{100000}{150000} \times 1000 = 66.7 \text{ بالآلف}$$

عدد المواليد الأحياء لفئة من معينة

$$(4) \text{ معدل الخصوبة حسب فئات العمر} = \frac{\text{عدد المواليد الأحياء لفئة من معينة}}{\text{عدد الإناث في نفس فئة السن في منتصف السنة}} \times 1000 \quad (10-11)$$

مثال (10-11): إذا كان عدد المواليد الأحياء 200000 والتي أنجبته 2000000 سيدة في فئة السن 20 - 25 سنة في إحدى البلدان فأوجد معدل الخصوبة حسب فئة السن

25 - 20

200000

$$\text{الحل : معدل الخصوبة حسب فئة السن 20 - 25} = \frac{200000}{2000000} \times 1000 = 100$$

بالألف

المواليد الأحياء

$$(5) \text{ الخصوبة الكلية (النظرية)} = \frac{\text{عدد المواليد الأحياء}}{\text{عدد الإناث في سن الانجاب}} \times 1000 \quad (10-12) \dots\dots$$

مثال (10-12): إذا كان عدد المواليد الأحياء في بلد ما (300000) وعدد الإناث في سن الانجاب 3.000.000 فأوجد معدل الخصوبة الكلية

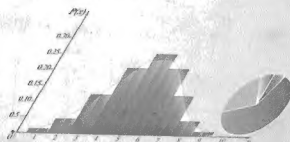
300000

$$\text{الخصوبة الكلية} = \frac{300000}{3000.000} \times 1000 = 100 \text{ بالألف}$$

المراجع

- مقدمة في الأساليب الاحصائية، د. شفيق العتوم ، 1992.
- أسس علم الاحصاء، عزام صبري وعلي أبو شرار، 1991.
- علم الاحصاء نظريات وتطبيقات، عزام صبري وعلي أبو شرار، 1990.
- مبادئ الاحصاء للمهن التجارية، كامل فليفل وفتحي حمدان، 1995.

مبادئ الإحصاء



الأصفاء للطباعة والنشر والتوزيع

عمّان، شارع التلطيح، مجمع الفجر من البحاري، تلفاكس 4612190

ص.ب 922762 عمّان 11121 الأردن

يطلب من

مكتبة الأرياف العامة



أبوظبي، مكاتب 678122 فاكس 678121
ص.ب 42373 أبوظبي، الإمارات العربية المتحدة

ردمك 3-40-402-9957 ISBN